Prof. Dr. Werner Bley

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 8

Aufgabe 1
Berechnen Sie die ersten 3 Koeffizienten in der 5-adischen Entwicklung von 1/3.

Aufgabe 2
Sei n eine zur Primzahl p teilerfremde natürliche Zahl. Zeige, dass die Menge

$$\{a \in \mathbb{Z} \mid a > 0 \text{ und } a \equiv 1 \pmod{n}\}$$

dicht in $\mathbb{Z}_p$ ist.

Aufgabe 3
Seien $\mathbb{F}_p$ der endliche Körper mit p Elementen, $R = \mathbb{F}_p[T]$ und $K = \mathbb{F}_p(T)$ der Quotientenkörper.

a) Definieren Sie zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von R, $\mathfrak{p} \neq (0)$, eine $\mathfrak{p}$-adische Bewertung. Beschreiben Sie den Zusammenhang zur Null- bzw. Polstellenordung bei $T = \alpha$, falls $\mathfrak{p} = (T - \alpha)$.

b) Zeigen Sie: Durch $v_\infty(\frac{f(T)}{g(T)}) = \deg(g(T)) - \deg(f(T))$ wird ebenfalls eine Bewertung auf K definiert. Interpretieren Sie dies als Null- bzw. Polstellenordnung in einem unendlich fernen Punkt ∞.

c) Seien $\mathfrak{p} = (p(T))$ mit irreduziblem $p(T)$, $F_\mathfrak{p}$ die durch $p(T)$ definierte Körperweiterung und $f_\mathfrak{p} = [F_\mathfrak{p} : \mathbb{F}_p]$. Definiere

$$|h(T)|_\mathfrak{p} := q^{-f_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}(h(T))} \text{ für } h(T) \in K \text{ und } |h(T)|_\infty := q^{-v_\infty(h(T))}, \text{ mit } q \in \mathbb{R}_{>1}\,.$$

Zeigen Sie die Geschlossenheitsrelation, i.e. für jedes $h(T) \in K^\times$ gilt:

$$|h(T)|_\infty \cdot \prod_{\mathfrak{p} \neq (0)} |h(T)|_\mathfrak{p} = 1.$$

Aufgabe 4
Sei $\varepsilon \in 1 + p\,\mathbb{Z}_p$ und $\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu p^\nu \in \mathbb{Z}_p$ und sei $s_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu p^\nu$ die Folge der Partialsummen.

a) Zeigen Sie, dass für $b \in \{0, \dots, p-1\}$, $i \in \{1, \dots, bp^n - 1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$v_p\left(\binom{b \cdot p^n}{i}\right) = n - v_p(i).$$

b) Zeigen Sie, dass die Folge ε^{s_n} gegen eine Zahl ε^α in $1 + p\,\mathbb{Z}_p$ konvergiert.
Hinweis: Reduzieren Sie das Problem darauf zu zeigen, dass $\{\varepsilon^{s_n}\}_n$ eine Cauchyfolge ist und schreiben Sie ε dann in der Form $\varepsilon = 1 + p\beta \in 1 + p\,\mathbb{Z}_p$.

c) Zeigen Sie weiter, dass dadurch $1 + p\,\mathbb{Z}_p$ zu einem $\mathbb{Z}_p$-Modul wird.

Aufgabe 5
Für eine natürliche Zahl n bezeichne μ_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln in einem algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}_p$. Sei nun p eine ungerade Primzahl. Zeige:

$$\mu_n \subseteq \mathbb{Z}_p \iff p \equiv 1 \pmod{n}.$$