Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 8

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 = 2$ in $\mathbb{Z}_7$ eine Lösung hat.

Aufgabe 2
Zeigen Sie: Die Folge $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots$ konvergiert fur keine Primzahl p in $\mathbb{Q}_p$.

Aufgabe 3
Sei $K/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper und $\alpha \in K^\times$. Sei $\mathcal{P}$ die Menge der Primideale $\neq 0$ von $\mathcal{O}_K$ und $\mathcal{P}_\infty := \{\rho_1, \ldots, \rho_r, \sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ die Menge der reellen Einbettungen und "der Hälfte der komplexen Einbettungen". Für eine reelle Einbettung ρ definieren wir $|\alpha|_\rho := |\rho(\alpha)|_\mathbb{R}$, wobei $|\ |_\mathbb{R}$ den gewöhnlichen Betrag auf $\mathbb{R}$ bezeichnet. Für eine komplexe Einbettung σ definieren wir $|\alpha|_\sigma := |\sigma(\alpha)|_\mathbb{C}^2$, wobei $|\ |_\mathbb{C}$ den gewöhnlichen Betrag auf $\mathbb{C}$ bezeichnet. Man zeige:

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_\infty} |\alpha|_\mathfrak{p} = 1.$$

Aufgabe 4
Sei $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

a) Zeige: $p^m a = p^m\,(a_n)_{n=1}^\infty = (\ldots, p^m a_2 \mod p^{p+2}, p^m a_1 \mod p^{m+1}, 0, \ldots, 0)$.

b) Zeige: $\varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist nullteilerfrei.