LMU
LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Wintersemester 2019/20

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 7

Aufgabe 1
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Finden Sie eine Untergruppe V von $\mathcal{O}_K^\times$ von endlichem Index.

Aufgabe 2
Sei α die reelle Nullstelle von $x^3 - 2$ und $\zeta := \zeta_3$.

a) Zeigen Sie: $L = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$ ist die galoissche Hülle von $\mathbb{Q}(\alpha)$.
Geben Sie die Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ in expliziter Form an.

b) Faktorisieren Sie $q = 2$ und $p = 3$, bestimmen Sie sämtliche Verzweigungs- und Trägheitsindizes, sowie die Zerlegung- und Trägheitsgruppen.

Aufgabe 3
Es sei L/K eine Galoiserweiterung von Zahlkörpern mit Gruppe G. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathcal{O}_K$ und $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ in L/K.

a) Für $\sigma \in G$ gelte
$$\sigma(\alpha) \equiv \alpha \mod \mathfrak{P}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}_L.$$
Zeigen Sie: $\sigma \in G_{\mathfrak{P}}$. Insbesondere, ist also dann $\sigma \in I_{\mathfrak{P}}$.

b) Seien $\sigma, \tau \in G$. Zeigen Sie:
$$\sigma(\alpha) \equiv \tau(\alpha) \mod \mathfrak{P}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}_L \Leftrightarrow \sigma \equiv \tau \mod I_{\mathfrak{P}}.$$

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$.

b) Bestimmen Sie die Gesamtheit der ganzzahligen Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ von
$$x^2 - 10y^2 = p,$$
für $p = 31$ und $p = 37$.

Aufgabe 5
Sei $n \in \mathbb{N}$ und C eine zyklische Gruppe der Ordnung n.
Zeigen Sie, dass es eine endliche galoissche Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ gibt mit $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong C$.
Hinweis: Benutzen Sie Kreiskörpertheorie und den Dirichletschen Primzahlsatz.