Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 6

Aufgabe 1
Bestimmen Sie mittels Polynomzerlegungsgsetz nochmals die Zerlegung von $p\mathcal{O}_K$ im quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Der Fall $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ wurde in der Vorlesung behandelt. Betrachten Sie hier noch den Fall $d \equiv 1 \pmod 4$.

Aufgabe 2
Sei $K = \mathbb{Q}(\omega)$ mit $\omega^3 = 2$. Zeigen Sie mit dem Polynomzerlegungsgesetz, dass 2 und 3 voll verzweigt sind und $5\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ mit Trägheitsgraden 1 und 2 ist.

Aufgabe 3
Sei $L/M/K$ ein Turm von Zahlkörpern und P, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p}$ Primideale in den jeweiligen Ganzheitsringen. Zeigen Sie, dass der Verzweigungsindex and der Trägheitsgrad multiplikativ in einem Körperturm sind, d.h.

$$e(P|\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) \cdot e(P|\mathfrak{P}),$$
$$f(P|\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) \cdot f(P|\mathfrak{P}).$$

Aufgabe 4
Sei p eine ungerade Primzahl und $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, wobei ζ eine primitive p-te Einheitswurzel bezeichnet. Sei μ_K die Gruppe der Einheitswurzeln in K.

a) Bestimmen Sie μ_K.

b) Sei K^+ der maximal reelle Teilkörper von K und sei $\langle\tau\rangle = \mathrm{Gal}(K/K^+)$ (τ ist also die komplexe Konjugation).
Zeigen Sie: $K^+ = K^{\langle\tau\rangle} = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$.

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathcal{O}_K^\times &\to \mu_K/\mu_K^2, \\ u &\mapsto \frac{u}{\tau(u)} \cdot \mu_K^2 \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist mit $\ker(f) = \mu_K \mathcal{O}_{K^+}^\times$.
Hinweis: Es gilt $|\sigma(\frac{u}{\tau(u)})^j| = 1$ *für alle Einbettungen* σ *und alle* j.

d) Zeigen Sie: $[\mathcal{O}_K^\times : \mu_K \mathcal{O}_{K^+}^\times] \leq 2$.

Aufgabe 5
Sei L/K eine endliche Erweiterung von Zahlkörpern und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Ideale in $\mathcal{O}_K$. Zeigen Sie, dass dann gilt

a) $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_L \cap K$.

b) $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a}_L \mid \mathfrak{b}_L$.