Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 5

Aufgabe 1
Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei. Zeigen Sie, dass die Einheiten von $\mathcal{O}_K$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, eineindeutig zu den Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ von $x^2 - dy^2 = \pm 4$ korrespondieren.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Einheitengruppe in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für $d = 6, 7, 29$, indem Sie eine normalisierte Fundamentaleinheit berechnen.

Aufgabe 3
Seien $\tau : K \to \mathbb{C}$ die Einbettungen von K nach $\mathbb{C}$. Wir teilen diese auf in die reellen $\rho_1, \ldots, \rho_r$ und die Paare der komplexen, $\sigma_1, \overline{\sigma_1}, \ldots, \sigma_s, \overline{\sigma_s}$. In der Vorlesung haben wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \ell : K_{\mathbb{R}}^{\times} &\to \mathbb{R}^{r+s} \\ (x_\tau)_\tau &\mapsto (\log|x_{\rho_1}|, \ldots, \log|x_{\rho_r}|, 2\log|x_{\sigma_1}|, \ldots, 2\log|x_{\sigma_s}|) \end{aligned}$$

und die Mengen

$$\begin{aligned} S &= \{y \in K_{\mathbb{R}}^{\times} : N(y) = \pm 1\}, \\ H &= \{x \in \mathbb{R}^{r+s} : Tr(x) = 0\}, \end{aligned}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\ell(S) = H$ gilt.

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass die quadratischen Zahlkörper mit der Diskriminante

$$5, 8, 12, 13, -3, -4, -7, -8, -11$$

die Klassenzahl 1 haben.

b) Berechnen Sie die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{-26})$.
Hinweise finden Sie auch in 'Algebraic Number Theory' von Fröhlich/Taylor auf Seite 167.

Aufgabe 5
Lesen Sie sich im Buch 'Algebraische Zahlentheorie' von J. Neukirch den Beweis der folgenden Aussage durch (Lemma 2.15, Kapitel III, p. 216):
Die konvexe, zentral-symmetrische Menge

$$X = \{(z_\tau) \in K_{\mathbb{R}} : \sum_\tau |z_\tau| \leq t\}$$

hat das Volumen $2^r \pi^s \frac{t^n}{n!}$.
Hinweis: Wenn Sie sich unter `https://login.emedien.ub.uni-muenchen.de/login` *mit Ihrer Campus-Kennung einloggen, können Sie sich eine pdf-Version dieses Buchs (und vieler anderer) kostenfrei herunterladen.*