Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 4

Aufgabe 1
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ ein biquadratischer Zahlkörper. Bestimmen Sie die Anzahl der reellen und komplexen Einbettungen in Abhängigkeit von d_1 und d_2. Geben Sie den Minkowski-Raum jeweils explizit an.

Aufgabe 2
Sei $\alpha^3 = 2$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Es ist $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$ (das brauchen Sie nicht zu zeigen).

a) Zeigen Sie, dass die Primzahlzerlegung von $2\mathcal{O}_K$ von der Form $2\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^3$ ist.

b) Geben Sie eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{p}$ an.

c) Berechnen Sie das Lebesgue-Volumen von $\Gamma = (f \circ j)(\mathfrak{p})$.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass der Minkowskische Gitterpunktsatz nicht verbessert werden kann, indem man eine konvexe, zentralsymmetrische Menge $X \subseteq V$ mit $\mathrm{Vol}(X) = 2^n \mathrm{Vol}(\Gamma)$ angibt, die keinen von 0 verschiedenen Punkt von Γ enthält.
Ist aber X kompakt, so ist das Gleichheitszeichen zulässig.
Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $(1+\varepsilon)X$ für $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 4
Sei K ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal.

a) Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl h gibt, so dass $\mathfrak{a}^h = a\mathcal{O}_K$ ein Hauptideal ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}$ im Körper $L = K(\sqrt[h]{a})$ ein Hauptideal wird, d.h. $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L = \alpha\mathcal{O}_L$.

c) Zeigen Sie, dass es zu jedem Zahlkörper K eine endliche Erweiterung L gibt, in der jedes Ideal von K ein Hauptideal wird.

Aufgabe 5
Sei K ein Zahlkörper.
Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{a} \lhd_K, \mathfrak{a} \neq (0)$, definieren wir $N(\mathfrak{a}) := |\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}|$. Zeigen Sie:

a) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $p\mathbb{Z} = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$. Dann ist $N(\mathfrak{p})$ eine p-Potenz.
Hinweis: $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ wird zu einem $\mathbb{F}_p$-Vektorraum.

b) $N(\mathfrak{p}^n) = N(\mathfrak{p})^n$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

c) $N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b})$ für alle Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd \mathcal{O}_K$.
Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathcal{O}_K$ und wenden Sie den Ch. Restsatz an.