Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 2

Aufgabe 1
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}), d \in \mathbb{Z}, d \neq 0, 1$ quadratfrei. Sei $p \neq 2$ eine Primzahl und d ein Quadrat modulo p. Sei $x \in \mathbb{Z}$, so dass $x^2 \equiv d \pmod{p}$. Im Fall $d \equiv 1 \pmod{4}$ gelte zusätzlich $x \equiv 1 \pmod{2}$. Zeigen Sie:

$$p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$$

mit

$$\mathfrak{p} = \begin{cases} \langle p, \frac{x+\sqrt{d}}{2} \rangle_{\mathbb{Z}}, & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4}, \\ \langle p, x + \sqrt{d} \rangle_{\mathbb{Z}}, & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

ist die Primidealzerlegung von $p\mathcal{O}_K$.

Aufgabe 2
Sei K ein algebraischer Zahlkörper von Grad n über $\mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$ und $\alpha \in \mathcal{O}_K$.
Zeigen Sie, dass

$$d(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}) = d(1, (\alpha + m), \ldots, (\alpha + m)^{n-1})$$

gilt.

Aufgabe 3
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine ganze algebraische Zahl und $f(x)$ das Minimalpolynom von α. Falls f Grad n hat, zeigen Sie dass,

$$d_K(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}) = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} f'(\sigma_i(\alpha)).$$

Aufgabe 4
Bestimmen Sie die Ganzheitsbasis für $K = \mathbb{Q}(\lambda)$, wobei $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$.

Aufgabe 5

Sei K ein algebraischer Zahlkörper von Grad n über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$d_K \equiv 0, 1 \bmod 4.$$

Man nennt diese Tatsache auch das *Stickelberger-Kriterium*

Aufgabe 6
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlörper und p eine Primzahl. Bestimmen Sie die Primidealzerlegung von $p\mathcal{O}_K$. Ein Teil hiervon wurde bereits in Aufgabe 1 erledigt.