



# Algebraische Zahlentheorie

## Übungsblatt 13

### Aufgabe 1

Sei  $K$  ein  $p$ -adischer Zahlkörper mit normierter Bewertung  $v$  und  $a \in K^\times$ . Sei  $\alpha$  eine Nullstelle von  $x^m - a$  und es gelte  $(v(a), m) = 1$ . Zeige:  $K(\alpha)/K$  ist voll verzweigt vom Grad  $m$ .

### Aufgabe 2

Für einen  $p$ -adischen Zahlkörper sei  $K^{nr}$  das Kompositum aller endlichen unverzweigten Erweiterungen von  $K$  (in einem festen algebraischen Abschluss von  $K$ ). Dann nennt man  $K^{nr}$  die maximal unverzweigte Erweiterung von  $K$ .

a) Zeige: Die maximal unverzweigte Erweiterung von  $\mathbb{Q}_p$  entsteht durch Adjunktion aller Einheitswurzeln von zu  $p$  teilerfremder Ordnung.

b) Zeige:  $K^{nr} = K\mathbb{Q}_p^{nr}$ .

### Aufgabe 3

Sei  $L/K$  eine Galoiserweiterung von  $p$ -adischen Zahlkörpern mit Gruppe  $G$ . Für  $s \geq -1$  sei

$$G_s = G_s(L/K) := \{\sigma \in G \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}_L^{s+1}} \text{ für alle } \alpha \in \mathcal{O}_L\}.$$

Zeige:

a)  $G_{s+1}$  ist ein Normalteiler in  $G$ .

b)  $G_s = 1$  für  $s \gg 0$ .

### Aufgabe 4

Sei  $L/K$  eine zyklische Körpererweiterung und  $\text{Gal}(L/K) = \langle \sigma \rangle$ . Sei  $\alpha \in L^\times$ . Dann gilt:

$$N_{L/K}(\alpha) = 1 \iff \text{es gibt } \beta \in L^\times \text{ mit } \alpha = \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}.$$

Hinweis: Das ist Hilberts Satz 90.