



Algebraische Zahlentheorie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Sei K ein p -adischer Zahlkörper und $V \leq K^\times$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeige: V ist offen und abgeschlossen in K .

Aufgabe 2

Sei K ein p -adischer Zahlkörper. Zeigen Sie die Stetigkeit des p -adischen Logarithmus

$$\log: K^\times \longrightarrow K.$$

Aufgabe 3

Sei K ein p -adischer Zahlkörper mit Verzweigungsindex $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$, $x \in \mathfrak{p}_K^n$ mit $n > e/(p-1)$ und $z \in \mathbb{Z}_p$. Zeige:

$$(1+x)^z = \exp(z \log(1+x)),$$

$$\log((1+x)^z) = z \log(1+x).$$

Aufgabe 4

Sei $\zeta = \zeta_{p^m}$ eine primitive p^m -te Einheitswurzel in \mathbb{Q}_p^c . Zeige:

(a) $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ ist voll verzweigt vom Grad $\varphi(p^m) = (p-1)p^{m-1}$.

(b) $\text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p) \simeq (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$.

(c) $\mathbb{Z}_p[\zeta]$ ist der Bewertungsring von $\mathbb{Q}_p(\zeta)$.

(d) $1 - \zeta$ ist ein Primelement mit Norm p .