Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 11

Aufgabe 1
Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $\alpha^3 = 2$ und sei $\mathfrak{p}$ das Primideal über der 3. Bestimmen Sie ein Primelement π für $\mathfrak{p}$, sowie ein Vertretersystem R von $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$, und berechnen Sie die $\mathfrak{p}$-adische Entwicklung von $1/3$.

Aufgabe 2
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathfrak{p} = 3\mathcal{O}_K$. Zeigen Sie, dass $\mu_8 \subset {}_{K_\mathfrak{p}}$ und geben Sie eine Formel zur Berechnung $\mathfrak{p}$-adischen Entwicklung der Elemente von μ_8 an.

Aufgabe 3
Sei K ein lokaler Körper (also $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$). Sei $\mathcal{O}_K$ der Bewertungsring und $\mathfrak{p}_K$ das maximale Ideal. Sei $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_K^e$. Es sei v_p die normierte Bewertung auf $\mathbb{Q}_p$ und wir bezeichnen die Fortsetzung von v_p auf K ebenfalls mit v_p. Es sei v_K die normierte Bewertung auf K. Zeige: $v_K = ev_p$.

Aufgabe 4
Sei K vollständig bezüglich dem nicht-archimedischen Betrag $|\ |$ und K^c ein algebraischer Abschluss. Wir bezeichnen die eindeutig bestimmte Fortsetzung von $|\ |$ auf K^c ebenfalls mit $|\ |$. Sei $\sigma\colon K^c \longrightarrow K^c$ ein K-Automorphismus. Zeige, dass $|\sigma(\alpha)| = |\alpha|$ für alle $\alpha \in K^c$ gilt.

Aufgabe 5
Bestimme die abgeschlossenen Untergruppen von $\mathbb{Z}_p$.