Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 10

Aufgabe 1
Sei K ein bezüglich des nicht-archimedischen Betrags $|\ |$ vollständiger Körper. Sei K^c ein algebraischer Abschluss von K. Zu $\alpha \in K^c$ wähle man eine endliche Erweiterung L mit $\alpha \in L$ und setze $|\alpha| := \sqrt[[L:K]]{|\mathrm{N}_{L/K}(\alpha)|}$. Zeige, dass diese Definition wohldefiniert ist.

Aufgabe 2
Sei $|\ |_p$ der p-adische Betrag auf $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Q}_p^c$ ein algebraischer Abschluss. Wir bezeichnen mit $|\ |_p$ ebenfalls seine eindeutig bestimmte Fortsetzung auf $\mathbb{Q}_p^c$ (siehe vorige Aufgabe). Berechne $|\sqrt[m]{p}|_p, |\zeta_{p^n}|_p$ sowie $|1 - \zeta_{p^n}|_p$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und eine primitive p^n-te Einheitswurzel ζ_{p^n}.

Aufgabe 3
Sei L eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}_p$ vom Grad n. Sei $|\ |_L$ die eindeutig bestimmte Fortsetzung von $|\ |_p$ auf L und v_L die zugehörige Bewertung.

a) Zeige, dass $\mathcal{O} := \{\alpha \in L \mid v_L(\alpha) \geq 0\}$ der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}_p$ in L ist.

b) Bestimme $v_L(L^\times)$ in Abhängigkeit vom Zerlegungsverhalten von $p\mathbb{Z}_p$ in $\mathcal{O}$.

Aufgabe 4
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathfrak{p} = 3\mathcal{O}_K$. Zeigen Sie, dass $\mu_8 \subset \mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}}$ und geben Sie eine Formel zur Berechnung der $\mathfrak{p}$-adischen Entwicklung der Elemente von μ_8 an.