LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley Wintersemester 19/20

Algebraische Zahlentheorie 1
Übungsblatt 1

Aufgabe 1
Ist $\frac{3+2\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}$ eine ganze algebraische Zahl?

Aufgabe 2
Sei $d \in \mathbb{Z}, d \neq 0, 1$, quadratfrei. Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ und $\mathcal{O}_K$ der Ring der ganzen Zahlen in K. Zeigen Sie: $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$ mit

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{d}, & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod 4, \\ \frac{1+\sqrt{d}}{2}, & \text{falls } d \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Aufgabe 3
Sei $d \in \mathbb{Z}, d < 0$, quadratfrei. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ und $\mathcal{O}_K$ der Ring der ganzen Zahlen in K. Man berechne $\mathcal{O}_K^\times$.

Aufgabe 4
Sei A ein Unterring eines Integritätsbereichs B, sei C der ganze Abschluss von A in B und seien $A[t], B[t]$ bzw. $C[t]$ Polynomringe in der Variablen t.

a) Seien $f, g \in B[t]$ normierte Polynome, so dass $f \cdot g \in C[t]$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $f, g \in C[t]$.

b) Zeigen Sie, dass $C[t]$ der ganze Abschluss von $A[t]$ in $B[t]$ ist. (Hinweis: Atiyah-McDonald, Sec. 5, Ex.9)

Sei nun A ein Integritätsbereich, $K = \mathrm{Quot}(A)$ und A ganz abgeschlossen in K.

c) Folgern Sie, dass dann $A[t]$ ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist.

Aufgabe 5
Sei $A \subseteq B$ eine Ringerweiterung und $b \in B$. Zeigen Sie: Dann ist $b \in B$ genau dann ganz über A, wenn es einen $A[b]$-Modul M gibt, so dass

- M endlich erzeugt als A-Modul ist.
- $\mathrm{Ann}_{A[b]}(M) = 0$ gilt.

Es ist derzeit keine Abgabe der Übungsblätter geplant. Wir werden Teile des Übungsblattes in der Übung besprechen, zu ausgewählten Aufgaben wird es auch Lösungsvorschläge online geben.