Algebraische Zahlentheorie
Lösungen Übungsblatt 5

Aufgabe 1
Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei. Zeigen Sie, dass die Einheiten von $\mathcal{O}_K$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, eineindeutig zu den Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ von $x^2 - dy^2 = \pm 4$ korrespondieren.

Wenn $\alpha = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{d}) \in \mathcal{O}_K$ eine Einheit ist, so folgt $N(\alpha) = \frac{1}{4}(x^2 - dy^2) = \pm 1$, also $x^2 + dy^2 = \pm 4$. Sei umgekehrt $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung der Pellschen Gleichung. Es ist zu zeigen: $\alpha = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{d}) \in \mathcal{O}_K$. Dann ist nämlich α eine ganze Zahl der Norm ± 1, also eine Einheit.

Sei $d \equiv 2 \pmod 4$. Dann folgt $0 \equiv x^2 - 2y^2 \pmod 4$, also auch $x^2 \equiv 0 \pmod 2$. Also teilt p die Zahl x und wegen $0 \equiv x^2 - 2y^2 \equiv 2y^2 \pmod 4$ auch die Zahl y. Also ist $\alpha \in \mathcal{O}_K = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{d}$.

Sei $d \equiv 3 \pmod 4$. Dann folgt $0 \equiv x^2 + y^2 \pmod 4$. Da Quadrate ungerader Zahlen stets kongruent 1 modulo 4 sind, sieht man unmittelbar, dass x und y gerade Zahlen sind.

Sei $d \equiv 1 \pmod 4$. Dann gilt

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\frac{1 + \sqrt{d}}{2} = \left\{ \frac{x + y\sqrt{d}}{2} | x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y \pmod 2 \right\}.$$

Hier folgt nun aus $0 \equiv x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \equiv (x - y)^2 \pmod 2$ sofort $x \equiv y \pmod 2$.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Einheitengruppe in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für $d = 6, 7, 29$, indem Sie eine normalisierte Fundamentaleinheit berechnen.

Die normalisierten Fundamentaleinheiten sind gegeben durch $5 + 2\sqrt{6}$, $8 + 3\sqrt{7}$ bzw. $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{29})$.

Aufgabe 3
Seien $\tau : K \to \mathbb{C}$ die Einbettungen von K nach $\mathbb{C}$. Wir teilen diese auf in die reellen $\rho_1, \ldots, \rho_r$ und die Paare der komplexen, $\sigma_1, \overline{\sigma_1}, \ldots, \sigma_s, \overline{\sigma_s}$. In der Vorlesung haben wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \ell : K_{\mathbb{R}}^{\times} &\to \mathbb{R}^{r+s} \\ (x_\tau)_\tau &\mapsto (\log|x_{\rho_1}|, \ldots, \log|x_{\rho_r}|, 2\log|x_{\sigma_1}|, \ldots, 2\log|x_{\sigma_s}|) \end{aligned}$$

und die Mengen

$$\begin{aligned} S &= \{y \in K_{\mathbb{R}}^{\times} : N(y) = \pm 1\}, \\ H &= \{x \in \mathbb{R}^{r+s} : Tr(x) = 0\}, \end{aligned}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\ell(S) = H$ gilt.

Wegen

$$\sum_{i=1}^{r} \log|x_{\rho_i}| + 2\sum_{j=1}^{s} \log|x_{\sigma_j}| = \sum_{\tau} \log|x_\tau| = \log\left(\prod_{\tau} |x_\tau|\right) = \log(1) = 0$$

folgt $\ell(S) \subseteq H$. Hierbei durchläuft in obiger Gleichungskette τ alle Einbettungen von K in $\mathbb{C}$.

Sei umgekehrt $(\alpha_{\rho_1}, \ldots, \alpha_{\rho_r}, \beta_{\sigma_1}, \ldots, \beta_{\sigma_s}) \in H$ gegeben. Es gilt:

$$\begin{aligned} \log|x_{\rho_i}| = \alpha_{\rho_i} &\iff x_{\rho_i} = \pm\exp(\alpha_{\rho_i}), \\ 2\log|x_{\sigma_j}| = \beta_{\sigma_j} &\iff x_{\sigma_j} = \pm\exp(\beta_{\sigma_j}/2). \end{aligned}$$

Betrachte

$$z := \big(\exp(\alpha_{\rho_1}), \ldots, \exp(\alpha_{\rho_r}), \exp(\beta_{\sigma_1}/2), \exp(\beta_{\sigma_1}/2), \ldots, \exp(\beta_{\sigma_s}/2), \exp(\beta_{\sigma_s}/2)\big)$$

Dann gilt offensichtlich $z \in K_{\mathbb{R}}^{\times}$ und wegen

$$N(z) = \prod_i \exp(\alpha_{\rho_i}) \cdot \prod_j \exp(\beta_{\sigma_j}) = \exp(\sum_i \alpha_{\rho_i} + \sum_j \beta_{\sigma_j}) = \exp(0) = 1,$$

also $z \in S$.

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass die quadratischen Zahlkörper mit der Diskriminante

$$5, 8, 12, 13, -3, -4, -7, -8, -11$$

die Klassenzahl 1 haben.

b) Berechnen Sie die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{-26})$.
Hinweise finden Sie auch in 'Algebraic Number Theory' von Fröhlich/Taylor auf Seite 167.

a) Wir wollen zeigen, dass die quad. Zahlkörper mit Diskriminante $5, 8, 12, -3, -4, -7, -8, -11$ die Klassenzahl 1 haben. Zuerst wollen wir die Minkowski-Schranke (aus Teilaufgabe 4)

$$B_D := \frac{n!}{n^n}\sqrt{|D|}\left(\frac{4}{\pi}\right)^s.$$

für die einzelnen Diskriminanten D berechnen. Da $s = 0$ für reell-quadratische Zahlkörper und $s = 1$ für imaginär-quadratischen Zahlkörper, erhalten wir, dass für alle angegeben Diskriminanten $B_D < 2$ ist außer für $D = -11$, wo $B_{-11} = 2.11....$ gilt. Wir können alle Fälle für die $B_D < 2$ gilt mit folgendem Argument erledigen: Jede nicht-triviale Klasse $[\mathfrak{a}] \in \mathrm{cl}_K$, wobei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, muss ein I enthalten mit $N(I) = 1$, also $I = \mathcal{O}_K$. Somit muss cl_K trivial sein.
Betrachten wir nun den Fall $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Hier gilt $B_{-11} < 3$. Also wissen wir aus der Vorlesung, dass die Primideale mit Norm kleiner als B_{-11} die Klassengruppe erzeugen. Nun ist aber $2\mathcal{O}_K$ prim, da $x^2 - x + 3$ irreduzibel ist modulo 2, also gibt es keine Primideale über der 2, welche diese Normbedingung erfüllen, da $N(2\mathcal{O}_K) = 4$. Also muss die Klassengruppe trivial sein.

b) Wir wollen nun die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{-26})$ berechnen. Es gilt $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-26}]$, $s = 1$, $d_K = -104$ und somit können wir die Minkowski-Schranke $B_{-26} = 6.49...$ berechnen. Mit einer Bemerkung aus der Vorlesung reicht es wieder nur Primideale mit Norm unter der Schranke B_{-26} zu beterachten.
Da $-104 \equiv 0 \bmod 8$ ist, verzweigt die 2 in $\mathcal{O}_K$, d.h., $\mathfrak{p}_2^2 = 2\mathcal{O}_K$. Wenn $\mathfrak{p}_2 = \alpha\mathcal{O}_K$ mit $\alpha = a + b\sqrt{-26}$ gilt, dann bekommen wir, wenn wir die Norm auf beiden Seiten nehmen $2 = a^2 + 26b^2$, was ein Widerspruch ist, da es kein solches Tupel $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ geben kann. Also repräsentiert $\mathfrak{p}_2$ eine Klasse der Ordnung 2.
Da das Legendre-Symbol $\left(\frac{-26}{3}\right) = 1$ ist, wissen wir, dass die 3 in $\mathcal{O}_K$ zerlegt ist: $3\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_3\bar{\mathfrak{p}}_3$, wobei $\mathfrak{p}_3 = (1 - \sqrt{-26}, 3)$. Dass $\mathfrak{p}_3 = \alpha\mathcal{O}_K$ ist, können wir mit dem selben Argument wie oben ausschließen (hier bekommt man: $3 = a^2 + 26b^2$). Als nächstes nehmen wir an: $\mathfrak{p}_3^2 = \beta\mathcal{O}_K$, was implizieren würde, dass $\beta = \pm 3$, wegen $9 = c^2 + 26d^2$ für $\beta = c + d\sqrt{-26}$. Daraus würde folgen $\mathfrak{p}_3^2 = \mathfrak{p}_3\bar{\mathfrak{p}}_3$ was wiederum ein Widerspruch ist. Es gilt nun $N_{K/\mathbb{Q}}(1 - \sqrt{-26}) = 27$, und $3 \nmid 1 - \sqrt{-26}$, also gilt $\mathfrak{p}_3^3 = (1 - \sqrt{-26})\mathcal{O}_K$. Also repräsentiert $\mathfrak{p}_3$ eine Klasse der Ordnung 3.
Da das Legendre-Symbol $\left(\frac{-26}{5}\right) = 1$ ist, wissen wir wiederum, dass die 5 in $\mathcal{O}_K$ zerlegt ist: $5\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_5\bar{\mathfrak{p}}_5$. Da $30 = N_{K/\mathbb{Q}}(2 - \sqrt{-26})$ gilt, muss, zumindest nach Vertauschung von $\mathfrak{p}_5$ und $\bar{\mathfrak{p}}_5$, gelten, dass $\mathfrak{p}_2\overline{\mathfrak{p}_3}\mathfrak{p}_5$ die triviale Klasse ist und somit muss $\mathfrak{p}_5$ die Ordnung 6 haben. Zusammenfassend haben wir also gezeigt, dass $\mathrm{cl}_K \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und diese Gruppe wird von der Klasse des Primideals $\mathfrak{p}_5$ erzeugt.