Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 13 Lösung

Aufgabe 1
Sei K ein p-adischer Zahlkörper mit normierter Bewertung v und $a \in K^\times$. Sei α eine Nullstelle von $x^m - a$ und es gelte $(v(a), m) = 1$. Zeige: $K(\alpha)/K$ ist voll verzweigt vom Grad m.

Sei w die normierte Bewertung auf L und e bzw. f der Verzweigungsindex bzw. Restklassenkörpergrad. Dann gilt:

$$mw(\alpha) = w(\alpha^m) = w(a) = ev(a).$$

Also ist m ein Teiler von $ev(a)$ und aufgrund der Voraussetzung $(v(a), m) = 1$ ist daher m ein Teiler von e. Insbesondere ist $m \leq e \leq ef = [L : K] \leq m$ und es folgt $[L : K] = e$.

Aufgabe 2
Für einen p-adischen Zahlkörper sei K^{nr} das Kompositum aller endlichen unverzweigten Erweiterungen von K (in einem festen algebraischen Abschluss von K). Dann nennt man K^{nr} die maximal unverzweigte Erweiterung von K.

a) Zeige: Die maximal unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ entsteht durch Adjunktion aller Einheitswurzeln von zu p teilerfremder Ordnung.

b) Zeige: $K^{nr} = K\mathbb{Q}_p^{nr}$.

a) Es ist zu zeigen: $\mathbb{Q}_p^{nr} = \mathbb{Q}_p(\zeta_n : p \nmid n)$, wobei hier ζ_n alle primitven Einheitswurzeln von zu p teilerfremder Ordnung durchläuft.

Sei $\mathbb{Q}_{p,f}$ die unverzweigt Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ vom Grad f. Dann ist $\mathbb{Q}_p^{nr} = \cup_{f \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_{p,f}$ und da $\mathbb{Q}_{p,f} = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^f-1})$ gilt, ist die linke Seite in der rechten Seite enthalten. Umgekehrt haben wir in der Vorlesung in größerer Allgemeinheit gezeigt, dass Erweiterungen der Form $\mathbb{Q}_p(\sqrt[n]{u})$ mit $p \nmid n$ und $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ stets unverzweigt sind.

b) Seien e und f der Verzweigungsindex und Restklassenkörpergrad von $K/\mathbb{Q}_p$. Dann ist $\mathbb{Q}_{p,f}$ die maximal unverzweigte Teilerweiterung von $K/\mathbb{Q}_p$ und es gilt $\mathbb{Q}_{p,f} = \mathbb{Q}_p^{nr} \cap K$. Sei nun m eine natürliche Zahl. Dann ist $\mathbb{Q}_{p,fm}/\mathbb{Q}_{p,f}$ unverzweigt vom Grad m und $K/\mathbb{Q}_{p,f}$ voll verzweigt vom Grad e. Also ist $K\mathbb{Q}_{p,fm}/K$ unverzweigt vom Grad m und wir erhalten $K_m = K\mathbb{Q}_{p,fm}$, wobei wie üblich K_m die unverzweigte Erweiterung von K vom Grad m bezeichnet. Insgesamt folgt:

$$K_{nr} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K\mathbb{Q}_{p,fm} = K\mathbb{Q}_p^{nr}.$$

Aufgabe 3
Sei L/K eine Galoiserweiterung von p-adischen Zahlkörpern mit Gruppe G. Für $s \geq -1$ sei

$$G_s = G_s(L/K) := \{\sigma \in G \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}_L^{s+1}} \text{ für alle } \alpha \in \mathcal{O}_L\}.$$

Zeige:

a) G_s ist ein Normalteiler in G.

b) $G_s = 1$ für $s >> 0$.

a) Sei $\tau \in G$ und $\sigma \in G_s$. Wegen $\tau(\mathcal{O}_L) = \mathcal{O}_L$ gilt dann $\sigma\tau(\alpha) \equiv \tau(\alpha) \pmod{\mathfrak{p}_L^{s+1}}$ für alle $\alpha \in \mathcal{O}_L$. Wegen $\tau(\mathfrak{p}_L) = \mathfrak{p}_L$ folgt durch Anwendung von τ^{-1}

$$\tau^{-1}\sigma\tau(\alpha) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}_L^{s+1}}$$

für alle $\alpha \in \mathcal{O}_L$. Also ist $\tau^{-1}\sigma\tau \in G_s$.

b) Offensichtlich gilt $\cap_s \mathfrak{p}_L^s = \{0\}$. Sei $\sigma \in G_s$ für alle $s \geq 0$. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathcal{O}_L$

$$\sigma(\alpha) - \alpha \in \cap_s \mathfrak{p}_L^s = \{0\}.$$

Also gilt für alle $\alpha \in \mathcal{O}_L$ die Gleichheit $\sigma(\alpha) = \alpha$. Wegen $L = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_L)$ ist dann $\sigma(\alpha) = \alpha$ für alle $\alpha \in L$. Es folgt $\sigma = \mathrm{id}$.

Aufgabe 4

Sei L/K eine zyklische Körpererweiterung und $\mathrm{Gal}(L/K) = \langle \sigma \rangle$. Sei $\alpha \in L^\times$. Dann gilt:

$$N_{L/K}(\alpha) = 1 \iff \text{es gibt } \beta \in L^\times \text{ mit } \alpha = \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}.$$

Hinweis: Das ist Hilberts Satz 90.

Das ist Satz IV.(3.5) in Neukirchs Buch.