Prof. Dr. Werner Bley Wintersemester 2019/20

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 12

Aufgabe 1
Sei K ein p-adischer Zahlkörper und $V \leq K^\times$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeige: V ist offen und abgeschlossen in $K^\times$.

Allgemein zeigt man zunächst den folgenden Sachverhalt:

a) Ist G eine topologische Gruppe und $U \leq G$ eine offene Untergruppe, so ist U auch abgeschlossen.

b) Ist G eine topologische Gruppe und $U \leq G$ eine abgeschlossene Untergruppe von endlichem Index, so ist U auch offen.

Beweis zu a): Schreibe

$$G = \bigcup_{g \in G/U} gU = U \cup \bigcup_{\substack{g \in G/U, \\ g \notin U}} gU.$$

Dann ist wegen der Stetigkeit der Multiplikation jede Teilmenge gU offen und damit ist auch $\bigcup_{g \in G/U, g \notin U} gU$ offen. Also ist U als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen.

Beweis zu b): Wie in a). Den endlichen Index braucht man, um zu zeigen, dass $\bigcup_{g \in G/U, g \notin U} gU$ als Vereinigung von abgeschlossenen wieder abgeschlossen ist.

Zur Lösung der Aufgabe reicht es also zu zeigen, dass jede Untegruppe V von $K^\times$ von endlichem Index offen ist. Sei dazu $m := [K^\times : V]$. Dann gilt $(K^\times)^m \subseteq V$. Wir zeigen: Es gibt $n \in \mathbb{N}$, so dass $1 + \mathfrak{p}_K^n \subseteq (K^\times)^m$ gilt. Dann gilt nämlich

$$V = \bigcup_{v \in V} v(1 + \mathfrak{p}_K^m),$$

und dies ist als Vereinignung von offenen Mengen offen.

Sei dazu n groß genug, so dass log und exp eine Bijektion $1 + \mathfrak{p}_K^n \simeq \mathfrak{p}_K^n$ stiften. Schreibe $\mathfrak{p}_K^n = m\mathfrak{p}_K^s$ mit $s = n - v_K(m)$ und setze voraus, dass s groß genug ist, so dass exp auch noch auf $\mathfrak{p}_K^s$ konvergiert, also $s > e/(p-1)$. Dann folgt:

$$1 + \mathfrak{p}_K^n = \exp(m\mathfrak{p}_K^s) = \exp(\mathfrak{p}_K^s)^m = (1 + \mathfrak{p}_K^s)^m \subseteq (K^\times)^m.$$

Aufgabe 2
Sei K ein p-adischer Zahlkörper. Zeigen Sie die Stetigkeit des p-adischen Logarithmus

$$\log \colon K^\times \longrightarrow K.$$

Allgemein gilt folgender Sachverhalt: Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{\nu=0}^\infty a_\nu x^\nu$, $a_\nu \in \mathbb{Q}_p$, konvergiere auf der offenen Teilmenge U von K. Dann ist die dadurch definerte Funktion auf U stetig.

Beweis: Sei $x_n \longrightarrow x$ eine Folge in U, die gegen $x \in U$ konvergiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_n)| &= |\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (x^\nu - x_n^\nu)| \\
&= |\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu (1 - z_n^\nu)| \text{ mit } z_n = x_n/x \\
&= |\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu (1 - z_n)(1 + z_n + \ldots + z_n^{\nu-1})|\} \\
&\leq \max_\nu \{|a_\nu x^\nu|, |(1 - z_n)|, |(1 + z_n + \ldots + z_n^{\nu-1})|\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Hierzu beachte man, dass $|a_\nu x^\nu|$ beschränkt ist, weil $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ konvergiert und daher $|a_\nu x^\nu|$ gegen 0 konvergiert. Offensichtlich konvergiert $1 - z_n$ gegen 0 und ebenso ist $|(1 + z_n + \ldots + z_n^{\nu-1})| \leq 1$ für große n, da z_n gegen 1 konvergiert.

Aus dem allgemeinen Resultat folgt die Stetigkeit von $\log\colon 1 + \mathfrak{p}_K \longrightarrow K$. Sei nun $x \in K^\times$ beliebig und $x_n \longrightarrow x$ eine Folge in $K^\times$. Für große n gilt $v_K(x) = v_K(x_n)$ und daher

$$x = \pi_K^m \omega(x) \langle x \rangle, \quad x = \pi_K^m \omega(x_n) \langle x_n \rangle,$$

mit $m = v_K(x) = v_K(x_n)$, $\omega(x), \omega(x_n) \in \mu_{q-1}$ und $\langle x \rangle, \langle x_n \rangle \in U_K^{(1)}$. Wegen $\log(\zeta) = 0$ für alle Einheitswurzeln folgt weiter

$$\log(x) - \log(x_n) = \log\langle x \rangle - \log\langle x_n \rangle.$$

Es reicht also zu zeigen, dass $\langle x_n \rangle$ gegen $\langle x \rangle$ konvergiert. Dazu:

$$\begin{aligned}
& x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \\
\Longrightarrow\quad & \omega(x_n)\langle x_n \rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \omega(x)\langle x \rangle \\
\Longrightarrow\quad & \frac{\omega(x_n)}{\omega(x)}\langle x_n \rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x \rangle \\
\Longrightarrow\quad & \frac{\omega(x_n)}{\omega(x)}\langle x_n \rangle = \langle x \rangle + \beta_n, \quad \beta_n \in \mathfrak{p}_K \text{ für } n >> 0, \\
\Longrightarrow\quad & \frac{\omega(x_n)}{\omega(x)} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_K} \text{ für } n >> 0, \\
\Longrightarrow\quad & \frac{\omega(x_n)}{\omega(x)} = 1 \text{ für } n >> 0, \\
\Longrightarrow\quad & \omega(x_n) = \omega(x) \text{ für } n >> 0.
\end{aligned}$$

Die vorletzte Implikation folgt, da $\mu_{q-1} \simeq (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K)^\times$.

Aufgabe 3
Sei K ein p-adischer Zahlkörper mit Verzweigungsindex $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$, $x \in \mathfrak{p}_K^n$ mit $n > e/(p-1)$ und $z \in \mathbb{Z}_p$. Zeige:

$$\begin{aligned}
(1+x)^z &= \exp(z \log(1+x)), \\
\log((1+x)^z) &= z \log(1+x).
\end{aligned}$$

Für $z = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu p^\nu$ sei $z_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu p^\nu$ die n-te Partialsumme. Dann gilt für alle n

$$\begin{aligned}
(1+x)^{z_n} &= \exp(z_n \log(1+x)), \\
\log((1+x)^{z_n}) &= z_n \log(1+x).
\end{aligned}$$

und wegen $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$ folgt die Behauptung aus der Stetigkeit der beteiligten Funktionen.

Aufgabe 4
Sei $\zeta = \zeta_{p^m}$ eine primitive p^m-te Einheitswurzel in $\mathbb{Q}_p^c$. Zeige:

(a) $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ ist voll verzweigt vom Grad $\varphi(p^m) = (p-1)p^{m-1}$.

(b) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p) \simeq (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$.

(c) $\mathbb{Z}_p[\zeta]$ ist der Bewertungsring von $\mathbb{Q}_p(\zeta)$.

(d) $1-\zeta$ ist ein Primelement mit Norm p.

Das ist Satz II.(7.13) in Neukirchs Buch. Interessierte Studierende sind auf den Beweis dieses Satzes verwiesen.