Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 11 Lösung

Aufgabe 1
Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $\alpha^3 = 2$ und sei $\mathfrak{p}$ das Primideal über der 3. Bestimmen Sie ein Primelement π für $\mathfrak{p}$, sowie ein Vertretersystem R von $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$, und berechnen Sie die $\mathfrak{p}$-adische Entwicklung von $1/3$.

Wir hatten schon einmal gezeigt, dass $3\mathcal{O}_K = (1+\alpha)^3$ eine Primidealzerlegung ist, für die gilt $\mathcal{O}_K/(1+\alpha) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Ein Vertretersystem ist also zum Beispiel gegeben durch $\{-1, 0, 1\}$.

Wir setzen nun $\pi := 1+\alpha$, und dann gilt $\pi^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2$ und $\pi^3 = 3(1 + \alpha + \alpha^2)$. Also gilt $1/3 = \pi^{-3}(1+\alpha+\alpha^2) = \pi^{-3}(\pi^0 - \pi^1 + \pi^2) = \pi^{-3} - \pi^{-2} + \pi^{-1}$.

Aufgabe 2
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathfrak{p} = 3\mathcal{O}_K$. Zeigen Sie, dass $\mu_8 \subset {}_{K_\mathfrak{p}}$ und geben Sie eine Formel zur Berechnung $\mathfrak{p}$-adischen Entwicklung der Elemente von μ_8 an.

Das war schon auf dem Übungsblatt 10.

Aufgabe 3
Sei K ein lokaler Körper (also $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$). Sei $\mathcal{O}_K$ der Bewertungsring und $\mathfrak{p}_K$ das maximale Ideal. Sei $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_K^e$. Es sei v_p die normierte Bewertung auf $\mathbb{Q}_p$ und wir bezeichnen die Fortsetzung von v_p auf K ebenfalls mit v_p. Es sei v_K die normierte Bewertung auf K. Zeige: $v_K = ev_p$.

Das ist im Prinzip Aufgabe 3 auf Übungsblatt 10.

Aufgabe 4
Sei K vollständig bezüglich dem nicht-archimedischen Betrag $|\ |$ und K^c ein algebraischer Abschluss. Wir bezeichnen die eindeutig bestimmte Fortsetzung von $|\ |$ auf K^c ebenfalls mit $|\ |$. Sei $\sigma\colon K^c \longrightarrow K^c$ ein K-Automorphismus. Zeige, dass $|\sigma(\alpha)| = |\alpha|$ für alle $\alpha \in K^c$ gilt.

Offensichtlich ist mit $|\ | \circ \sigma$ ebenfalls eine Fortsetzung von $|\ |$ auf K^c gegeben. Aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt daher $|\sigma(\alpha)| = |\alpha|$ für alle $\alpha \in K^c$ gilt.

Aufgabe 5
Bestimme die abgeschlossenen Untergruppen von $\mathbb{Z}_p$.

Sei $V \neq 0$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{Z}_p$. Wir zeigen, dass dann V ein Ideal $\neq 0$ ist. Dazu: Da V eine Untergruppe ist, ist V additiv abgeschlossen. Sei $v \in V$ und $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ mit $0 \leq a_n < p$ ein beliebiges Element in $\mathbb{Z}_p$. Es ist dann zu zeigen: $av \in V$. Sei dazu $s_m := \sum_{n=0}^{m-1} a_n p^n$ die m-te Partialsumme von a. Da V eine Untergruppe ist, folgt $s_m v \in V$. Aus $s_m v \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} av$ und folgt $av \in V$ aus der Abgeschlossenheit von V.

Die abgeschlossenen Untergruppen von $\mathbb{Z}_p$ sind also gegeben durch 0 und die Ideale $p^n\mathbb{Z}_p$, $n \geq 0$.