Prof. Dr. Werner Bley Wintersemester 2019/20

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 10 Lösung

Aufgabe 1
Sei K ein bezüglich des nicht-archimedischen Betrags $|\ |$ vollständiger Körper. Sei K^c ein algebraischer Abschluss von K. Zu $\alpha \in K^c$ wähle man eine endliche Erweiterung L mit $\alpha \in L$ und setze $|\alpha| := \sqrt[[L:K]]{|\mathrm{N}_{L/K}(\alpha)|}$. Zeige, dass diese Definition wohldefiniert ist.

Seien L_1, L_2 zwei endliche Erweiterungen von K mit $\alpha \in L_1 \cap L_2$. Sei $L := L_1 L_2$. Dann reicht es für $i = 1, 2$ zu zeigen:

$$\sqrt[[L:K]]{|\mathrm{N}_{L/K}(\alpha)|} = \sqrt[[L_i:K]]{|\mathrm{N}_{L_i/K}(\alpha)|}.$$

Dazu: Wegen $[L:K] = [L:L_i] \cdot [L_i:K]$ und $\mathrm{N}_{L/L_i}(\alpha) = \alpha^{[L:L_i]}$ gilt

$$\begin{aligned}
& \sqrt[[L:K]]{|\mathrm{N}_{L/K}(\alpha)|} \\
= \ & \sqrt[[L:K]]{|\mathrm{N}_{L_i/K}(\mathrm{N}_{L/L_i}(\alpha))|} \\
= \ & \sqrt[[L:K]]{|\mathrm{N}_{L_i/K}(\alpha^{[L:L_i]})|} \\
= \ & \sqrt[[L_i:L]{|\mathrm{N}_{L_i/K}(\alpha^{[L:L_i]})|}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2
Sei $|\ |_p$ der p-adische Betrag auf $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Q}_p^c$ ein algebraischer Abschluss. Wir bezeichnen mit $|\ |_p$ ebenfalls seine eindeutig bestimmte Fortsetzung auf $\mathbb{Q}_p^c$ (siehe vorige Aufgabe). Berechne $|\sqrt[m]{p}|_p, |\zeta_{p^n}|_p$ sowie $|1-\zeta_{p^n}|_p$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und eine primitive p^n-te Einheitswurzel ζ_{p^n}.

Es gilt

$$|\sqrt[m]{p}|_p^m = |\sqrt[m]{p}^m|_p = |p|_p = p^{-1},$$

also $|\sqrt[m]{p}|_p = p^{-1/m}$.

Sei $K/\mathbb{Q}_p$ endlich und $\eta \in \mathcal{O}_K^\times$. Dann gibt es $\varepsilon \in \mathcal{O}_K$ mit $\eta\varepsilon = 1$. Beachte, dass $|\eta|_p, |\varepsilon|_p \leq 1$. Aus $1 = |1|_p = |\eta\varepsilon|_p = |\eta|_p|\varepsilon|_p$ folgt also $|\eta|_p = 1$ für alle Einheiten. Insbesondere ist $|\zeta_{p^n}|_p$.

Es gilt

$$\prod_{\substack{a=1 \\ p \nmid a}}^{p^n-1} (X - \zeta_{p^n}^a) = X^{p^{n-1}(p-1)} + X^{p^{n-1}(p-2)} + \ldots + X^{p^{n-1}} + 1.$$

Also folgt

$$\prod_{\substack{a=1 \\ p \nmid a}}^{p^n-1} (1 - \zeta_{p^n}^a) = p.$$

Wegen $1 - \zeta_{p^n}^a \sim 1 - \zeta_{p^n}$ erhalten wir

$$p^{-1} = \prod_{\substack{a=1 \\ p \nmid a}}^{p^n-1} |1 - \zeta_{p^n}^a|_p = |1 - \zeta_{p^n}|_p^{p^{n-1}(p-1)},$$

also $|1 - \zeta_{p^n}|_p = p^{-1/p^{n-1}(p-1)}$.

Aufgabe 3
Sei L eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}_p$ vom Grad n. Sei $|\ |_L$ die eindeutig bestimmte Fortsetzung von $|\ |_p$ auf L und v_L die zugehörige Bewertung.

a) Zeige, dass $\mathcal{O} := \{\alpha \in L \mid v_L(\alpha) \geq 0\}$ der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}_p$ in L ist.

b) Bestimme $v_L(L^\times)$ in Abhängigkeit vom Zerlegungsverhalten von $p\mathbb{Z}_p$ in $\mathcal{O}$.

a) Dies wurde im Rahmen des Beweises zu [Protokoll, Satz 6.3.5] gezeigt (siehe [Protokoll, Bemerkung 6.3.6])

b) Seien e und f der Verzweigungsindex und der Restklassenkörpergrad von $L/\mathbb{Q}_p$. Wie im Zahlkörperfall definiert man eine Norm auf den Idealen durch $N(\mathfrak{p}_L^m) = |\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_L^m)|$. Wie im Zahlkörperfall zeigt man die Formel

$$N(\mathfrak{p}_L^m)\mathbb{Z}_p = N_{L/K}(\pi_L^m)\mathbb{Z}_p.$$

Wegen $\mathfrak{p}_L^a/\mathfrak{p}_L^{a+1} \simeq \mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_L$ und $|\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_L| = p^f$ erhält man $N_{L/K}(\pi_L^m)\mathbb{Z}_p = p^{fm}\mathbb{Z}_p$. Insbesondere also

$$N_{L/K}(\pi_L)\mathbb{Z}_p = p^f\mathbb{Z}_p,$$

d.h. $N_{L/K}(\pi_L)$ und p^f unterscheiden sich nur um eine Einheit in $\mathbb{Z}_p$. Also folgt:

$$v_L(\pi_L) = \frac{1}{[L:\mathbb{Q}_p]} v(N_{L/\mathbb{Q}_p}(\pi_L)) = \frac{1}{[L:\mathbb{Q}_p]} \cdot f = \frac{1}{e}.$$

Wegen $L^\times = \pi_L^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{O}_L^\times$ folgt $v_L(L^\times) = \frac{1}{e}\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathfrak{p} = 3\mathcal{O}_K$. Zeigen Sie, dass $\mu_8 \subset \mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}}$ und geben Sie eine Formel zur Berechnung der $\mathfrak{p}$-adischen Entwicklung der Elemente von μ_8 an.

Wir haben also $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathfrak{p} = 3\mathcal{O}_K$, $f := x^8 - 1$ und wir setzen $\pi := 3$. Wir wählen ein Repräsentantensystem R von $\mathcal{O}_K/3\mathcal{O}_K$ also beispielsweise $\{0, 1, 2, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}\}$. Sei nun $\alpha_n = \sum_{j=0}^n a_j 3^j$. Nun soll aber gelten:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n+1}3^{n+1} \tag{1}$$
$$f(\alpha_n) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^{n+1} \tag{2}$$

Also auch $f(\alpha_{n+1}) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^{n+2}$ und dadurch $f(\alpha_{n+1}) = (\alpha_n + a_{n+1}3^{n+1})^8 - 1$. Daraus ergibt sich

$$\alpha_n^8 + 8\alpha_n^7 a_{n+1} 3^{n+1} - 1 \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^{n+2}$$

Dies ist aber genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{\alpha_n^8 - 1}{3^{n+1}}(-8\alpha_n^7)^{-1} \equiv a_{n+1} \bmod \mathfrak{p}$$

erfüllt ist, wobei zu bemerken ist, dass $-8\alpha_n^7$ offensichtlich invertierbar ist. Somit kann aber immer der nächste Koeffizient berechnet werden. Um nun die $\mathfrak{p}$-adische Entwicklung der einzelnen Einheitswurzeln zu berechnen, müssen wir also einfach mit einem Repräsentanten ungleich Null als α_0 beginnen.