Vorlesung 9

18.5.2020

Wiederholung

$$\begin{tikzcd}
\cdots & X_{-2} \arrow[l] & X_{-1} \arrow[l, "d_{-1}"'] & & X_0 \arrow[ll, "d_0"'] & X_1 \arrow[l, "d_1"'] & X_2 \arrow[l, "d_2"'] & \cdots \arrow[l] \\
& 0 & & \mathbb{Z} \arrow[ul] \arrow[ll] \arrow[ur, "\varepsilon"'] & & & & \\
& & & 0 \arrow[u] & & & &
\end{tikzcd}$$

exakt an allen Stellen

$$X_{-q-1} = X_q = \bigoplus \mathbb{Z}[G]\,\underbrace{(\sigma_1, \dots, \sigma_q)}_{\in G^q}$$

q-Zellen

$$X_q \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_q, \mathbb{Z})$$

$$x = (\sigma_1, \dots, \sigma_q) \longmapsto x^*$$

Allgemeine Bemerkung

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

G-Moduln exakt

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \to A^G \to B^G \to C^G \\ \qquad \text{ist stets exakt} \\ \text{i.A. geht Rechtsexaktheit verloren} \end{cases}$$

Bspl: $0 \to I_G \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$

$$\Rightarrow \quad 0 \to I_G^G \to \mathbb{Z} \cdot N_G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z} \to 0$$

$$N_G \longmapsto |G|$$

ist exakt

ZIEL:

$$0 \to A^G \to B^G \to C^G \to H^1(G,A) \to H^1(G,B)$$
$$\to \cdots$$

Auf die Standardauflösung wende

$$\mathrm{Hom}_G(-,A) = -^G \circ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,A)$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & A & & A & & \\
 & & & & \| & & \| & & \\
\cdots \to & \mathrm{Hom}_G(X_{-2},A) & \xrightarrow{\partial_{-1}} & & \mathrm{Hom}_G(X_{-1},A) & \xrightarrow{\partial_0} & \mathrm{Hom}_G(X_0,A) & \xrightarrow{\partial_1} & \mathrm{Hom}_G(X_1,A) \nearrow \cdots \\
 & \| & & & \| & & \| & & \| \\
\cdots \to & A_{-2} & \longrightarrow & & A_{-1} & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & A_1 \to \cdots
\end{array}$$

klar:

$$\partial_{q+1} \circ \partial_q = 0$$

Def.: $$H^q(G,A) := \frac{\ker(\partial_{q+1})}{\mathrm{im}(\partial_q)} = \frac{Z_q(A)}{B_q(A)}$$

$$q \in \mathbb{Z}$$

A_q q-Koketten

Sei $x \in A_q = A_{-q-1} = \mathrm{Hom}_G(X_q, A)$

$$X_q = \bigoplus \mathbb{Z}[G](\sigma_1, \ldots, \sigma_q)$$

x ist eindeutig bestimmt durch die Werte auf den q-Zellen $\Longrightarrow$ fasse also x als Abb.

$$x : G^q \longrightarrow A$$

auf. Also:

$$A_q = A_{-q-1} = \{ x : G^q \longrightarrow A \}$$

$$q \geq 1.$$

$$A_0 = A_{-1} = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], A) \simeq A$$
$$f \longmapsto f(1)$$

Man erhält:

$$\partial_0 x = N_G x, \quad x \in A_{-1} = A$$

$$(\partial_1 x)(\sigma) = \sigma x - x \quad x \in A_0 = A$$

$$(\partial_q x)(\sigma_1, \dots, \sigma_q) \quad x \in A_{q-1}, \; q \geq 2$$

$$= \sigma_1 \left(x(\sigma_2, \dots, \sigma_q) \right) + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i x(\sigma_1, \dots, \sigma_i \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_q) + (-1)^q x(\sigma_1, \dots, \sigma_{q-1})$$

$$\partial_{-1}(x) := \sum_{\sigma \in G} \underbrace{\left(\sigma^{-1} x(\sigma) - x(\sigma) \right)}_{(\sigma^{-1} - 1)\, x(\sigma)}, \quad x \in A_{-2} = A_1 = \{ x : G \longrightarrow A \}$$

Restliche Formeln siehe [Neu, S.17].

Explizit für $q=2$:

$$(\partial_2 x)(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 \, x(\sigma_2) - x(\sigma_1\sigma_2) + x(\sigma_1)$$

Beispiele: $q=0$

$$\begin{array}{ccccccc} A_{-1} & = & A & \simeq & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], A) & \ni & f \\ & & & & & & \Big\downarrow \\ A_0 & = & A & \simeq & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], A) & \ni & f \circ d_0 \end{array}$$

Dann folgt die Formel für ∂_0 aus

$$(f \circ d_0)(1) = f(N_G) = N_G f(1)$$

$q=1$

$$\begin{array}{ccccc} A_0 = A & \simeq & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], A) & \ni & f \\ & & \Big\downarrow \partial_1 & & \\ A_1 = \{x : G \to A\} & = & \mathrm{Hom}_G(X_1, A) & \ni & f \circ d_1 \end{array}$$

$$f(d_1((\sigma))) = f(\sigma - 1) = (\sigma - 1) \cdot f(1)$$

Explizite Berechnung für $q = -1, 0, 1$:

$q = -1$:

$$Z_{-1} = \ker(N_G) = {}_{N_G}A$$

$$B_{-1} = \operatorname{im}(\partial_{-1}) = I_G A = \left\{ \sum_{\sigma \neq 1} n_\sigma (\sigma(a) - a) \;\middle|\; a \in A,\ n_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$H^{-1}(G, A) := {}_{N_G}A / I_G A$$

$q = 2$

$$Z_0 = \ker(\partial_1) = A^G$$

$$B_0 = \operatorname{im}(\partial_0) = N_G A$$

$$H^0(G, A) = A^G / N_G A$$

$q = 1$:

$$Z_1 = \ker(\partial_2) = \{ x : G \to A \mid x(\sigma\tau) = \sigma x(\tau) + x(\sigma)\ \forall \sigma, \tau \in G \}$$

$$B_1 = \operatorname{im}(\partial_1) = \{ x : G \to A \mid \exists a \in A : x(\sigma) = \sigma(a) - a \}$$

$$H^1(G, A) = Z_1 / B_1$$

Bemerkungen: (1) Z_1 "crossed homom."

(2) Falls G trivial auf A wirkt, d.h. $\sigma a = a$, $\forall a \in A$, $\forall \sigma \in G$. Dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, A) \\ B_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow H^1(G,A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,A)$$

(3) Falls $0 \to A \to B \to C \to 0$ exakt ist, und falls $H^1(G, A) = 0$, so ist

$$0 \to A^G \to B^G \to C^G \to 0$$

exakt.

Die lange exakte Kohomologiesequenz

Sei $f: A \to B$ ein G-Modulhomom.

Dann:
$$\begin{aligned} f_q : A_q &\longrightarrow B_q \\ x &\longmapsto f \circ x, \quad x : G^q \to A \end{aligned}$$

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A_{q-1} \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_{q-1}"] & A_q \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_q"] & A_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{q+1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & B_{q-1} \arrow[r, "\partial_q"] & B_q \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & B_{q+1} \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

kommutiert

$f : A \to B$ induziert Homom.

$$\bar{f}_q : H^q(G,A) \longrightarrow H^q(G,B)$$

<u>Explizit:</u> $\bar{c} \in H^q(G,A)$, $c \in Z_q(A)$

<u>Dann:</u> $fc = \underline{\underline{f \circ c}}$ repräsentiert $\bar{f}_q(\bar{c})$.

<u>Satz</u> Sei $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ eine ses. von G-Moduln. Dann gibt es für alle $q \in \mathbb{Z}$ einen Homom.

$$\delta_q : H^q(G,C) \longrightarrow H^{q+1}(G,A),$$

so daß

$$\cdots \to H^q(G,A) \xrightarrow{\bar{i}_q} H^q(G,B) \xrightarrow{\bar{j}_q} H^q(G,C) \xrightarrow{\delta_q} H^{q+1}(G,A) \to H^{q+1}(G,B) \to H^{q+1}(G,C) \xrightarrow{\delta_{q+1}} \cdots$$

exakt ist.

<u>Def.:</u> δ_q heißt <u>Verbindungshomom.</u>

Beweis: Betrachte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{q-1} \arrow[r, "i_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_q"] & B_{q-1} \arrow[r, "j_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_q"] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_q \arrow[r, "i_q"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & B_q \arrow[r, "j_q"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & C_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{q+1} \arrow[r, "i_{q+1}"] & B_{q+1} \arrow[r, "j_{q+1}"] & C_{q+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$b_{q-1} \mapsto c_{q-1}$

b'_q $\quad$ $b_q \mapsto c_q$ $\quad$ $b_q - b'_q$

$c_q - c'_q$

b_{q+1}

$a_{q+1} \mapsto$

$$\boxed{\delta_q(\bar{c}_q) := a_{q+1} + \partial_{q+1}(A_q)}$$

Die Zeilen sind exakt, weil:

$$0 \to A \to B \to C \to 0 \quad \text{exakt}$$

$\xRightarrow{\mathrm{Hom}_G(X_i,-)}$ Zeilen bleiben exakt, da X_i $\mathbb{Z}[G]$-frei.

Definition von δ_q: Sei $\overline{c_q} \in H^q(G,C)$

$$H^q(G,C) = Z_q(C)/B_q(C) \subseteq C_q/B_q(C)$$

$$C_q = \{x : G^q \to C\} \ni c_q$$

Es gilt: $\partial_{q+1}(c_q) = 0$. Sei $b_q \in B_q$ mit $j_q(b_q) = c_q$. Dann ist

$$\partial_{q+1}(b_q) \in \ker(j_{q+1}) = \operatorname{im}(i_{q+1})$$

$\Rightarrow$ es gibt $a_{q+1} \in A_q$ mit

$$i_{q+1}(a_{q+1}) = \partial_{q+1}(b_q)$$

Es gilt:

$$i_{q+2}(\partial_{q+2}(a_{q+1})) = \partial_{q+2}(i_{q+1}(a_{q+1}))$$

$$= \partial_{q+2}(\partial_{q+1}(b_q)) = 0$$

Da i_{q+2} injektiv ist, folgt:

$$\partial_{q+2}(a_{q+1}) = 0, \text{ d.h. } a_{q+1} \in Z_{q+1}(A).$$

Def.: $\delta_q(\bar{c}_q) := \overline{a_{q+1}}$

Wohldefiniertheit: Diagrammjagd liefert die Unabhängigkeit von der Wahl von b_q mit $j_q(b_q) = c_q$.

Sei $\overline{c_q} = \overline{c_q'}$, d.h. $c_q - c_q' \in B_q(C)$

Also existiert $c_{q-1} \in C_{q-1}$ mit

$$\partial_q(c_{q-1}) = c_q - c_q'$$

Wähle $b_{q-1} \in B_{q-1}$ mit $j_{q-1}(b_{q-1}) = c_{q-1}$

$$\Rightarrow j_q(b_q - \partial_q(b_{q-1})) =$$

$$= j_q(b_q) - j_q(\partial_q(b_{q-1}))$$

$$= c_q - \partial_q(j_{q-1}(b_{q-1}))$$

$$= c_q - \partial_q(c_{q-1})$$

$$= c_q - c_q + c_q' = c_q'.$$

$$a_{q+1} = a_{q+1}'$$

$$\Uparrow$$

$$\partial_{q+1}(b_q') = \partial_{q+1}(b_q)$$

$$\Uparrow$$

$\Rightarrow b_q' := b_q - \partial_q(b_{q-1})$ kann gewählt werden