Vorlesung 8

13.5.2020

Wiederholung:

G endliche Gruppe

R komm. Ring mit 1

$R[G] = \{ \sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in R \}$ **Hier:** $\mathbb{Z}[G]$

A abelsche Gruppe mit G-Wirkung

$\Rightarrow$ A ist ein $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

Standardbeispiele:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dash, "G"] \\ K \end{tikzcd}$$

$L, \mathcal{O}_L$

$I_L, L^\times, Cl_L, \mathcal{O}_L^\times, \mu_L$

Wichtige ses:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I_G \arrow[r] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\ & & 1 \arrow[r, mapsto] & 1 & \\ & & \sigma \arrow[r, mapsto] & 1 & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mu"] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r] & J_G \arrow[r] & 0 \\ & 1 \arrow[r, mapsto] & N_G = \sum_{g \in G} g & & \end{tikzcd}$$

$$I_G = \bigoplus_{\sigma \neq 1} \mathbb{Z}(\sigma - 1), \quad J_G = \bigoplus_{\sigma \neq 1} \mathbb{Z}(\sigma + \mathbb{Z} \cdot N_G)$$

Wichtige Begriffbildungen: A G-Modul

$$\begin{array}{c} A^G = \{ a \in A \mid ga = a, \ \forall g \in G \} \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\ N_G A \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad A^G / N_G A$$

$$\begin{array}{c} {}_{N_G}A := \ker(N_G) \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\ I_G A = \left\{ \sum_{\text{endl.}} \lambda_i a_i \ \middle| \ \lambda_i \in I_G, \ a_i \in A \right\} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad {}_{N_G}A / I_G A$$

A, B G-Moduln

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B) \circlearrowleft G \qquad gf := g \circ f \circ g^{-1}$$

$$\rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad g \in G$$

$$f$$

Dann: $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B)^G \iff (gf)(a) = f(a), \ \forall a, g$

$\iff g(f(g^{-1}a)) = f(a), \ \forall a, g$

$\iff g(f(a)) = f(g(a)), \ \forall a, g$

$\iff f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(A,B)$

$A \otimes_{\mathbb{Z}} B \circlearrowleft G$ diagonal

Bspl: $\mu_3 \circlearrowleft G \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\times}$ $\qquad \mu_3^{G} = \{1\}$

$$\sigma_a \leftarrow\!\shortmid \overline{a}$$

$$\mu_3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_3 \ni (\zeta_3 \otimes \zeta_3)^{\sigma_2} = \zeta_3^2 \otimes \zeta_3^2$$

$$= \zeta_3 \otimes \zeta_3^{2\cdot 2} = \zeta_3 \otimes \zeta_3$$

$$(\zeta_3 \otimes \zeta_3^2)^{\sigma_2} = \zeta_3^2 \otimes \zeta_3^4 = \zeta_3 \otimes \zeta_3^8$$

$$= \zeta_3 \otimes \zeta_3^2$$

Leicht:

$$\mu_3 \otimes \mu_3 \simeq \mu_3$$

$$\zeta_3 \otimes \zeta_3^a \mapsto \zeta_3^a$$

$$a = 0, 1, 2$$

Also: $(\mu_3 \otimes \mu_3)^G = \mu_3 \otimes \mu_3$

Dies ist Gegenbeispiel zu: $A^G \otimes_{\mathbb{Z}} B^G = (A \otimes B)^G$

Def.: A frei $:\Longleftrightarrow \exists\, \mathbb{Z}[G]$-Isom. $f: A \to \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}[G]$

Satz: X $\mathbb{Z}[G]$-frei $\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}_G(X,-)$ ist exakt

d.h. $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ exakt

impliziert, daß

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(X,A) \to \mathrm{Hom}_G(X,B) \to \mathrm{Hom}_G(X,C) \to 0$$

ebenfalls exakt ist.

Bemerkung: Man "X $\mathbb{Z}[G]$-frei" ersetzen durch "X $\mathbb{Z}[G]$-projektiv".

Def.: Ein $\mathbb{Z}[G]$-Modul P heißt *projektiv*, falls

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \arrow[dl, phantom, shift left=3, "\equiv"] & \\ B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

exakt

Man zeigt:

P proj. $\Leftrightarrow$ $\exists Q$, so daß $P \oplus Q$ ein freier $\mathbb{Z}[G]$-Modul ist.

Drei Lemmata:

Lemma 1 Ist

$$\cdots \leftarrow X_{q-1} \leftarrow X_q \leftarrow X_{q+1} \leftarrow \cdots$$

eine exakte Sequenz von <u>freien</u> $\mathbb{Z}$-Moduln und D ein beliebiger $\mathbb{Z}$-Modul. Dann ist

$$\cdots \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{q-1}, D) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_q, D) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{q+1}, D) \to \cdots$$

exakt.

Lemma 2 Ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine exakte Sequenz von <u>freien</u> $\mathbb{Z}$-Moduln und X beliebig. Dann ist

$$0 \to X \otimes_{\mathbb{Z}} A \to X \otimes_{\mathbb{Z}} B \to X \otimes_{\mathbb{Z}} C \to 0 \text{ exakt.}$$

Lemma 3: Ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine exakte Sequenz von beliebigen $\mathbb{Z}$-Moduln und X ein freier $\mathbb{Z}$-Modul. Dann ist

$$0 \to X \otimes_{\mathbb{Z}} A \to X \otimes_{\mathbb{Z}} B \to X \otimes_{\mathbb{Z}} C \to 0$$

exakt.

Beispiele:

(1) $$\dots \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{n} \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \dots$$

Wende $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z})$ $\Longrightarrow$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z})}_{0} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \arrow[d, phantom, "{\cong \; f(1) \leftarrow f}"] \arrow[dr] & \\
 & & & & \mathbb{Z} \arrow[d, "n"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
 & & & & \mathbb{Z} \arrow[ur, phantom, "\cong"] & 0 \arrow[d] \\
 & & & & & \vdots
\end{tikzcd}$$

keine Exaktheit hier

(2) $$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

Wende $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ an $\Longrightarrow$

$$0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

Nullabbildung

keine Exaktheit hier

Tate - Kohomologiegruppen

G endliche Gruppe

Definition: Unter einer *vollständigen Auflösung von $\mathbb{Z}$* versteht man einen unendlichen Komplex

$$\begin{tikzcd}
\cdots & X_{-2} \arrow[l] & & X_{-1} \arrow[ll, "d_{-1}"'] & & X_0 \arrow[ll, "d_0"'] \arrow[dl, "\varepsilon"] & & X_1 \arrow[ll, "d_1"'] & & X_2 \arrow[ll, "d_2"'] & \cdots \arrow[l] \\
& & & & \mathbb{Z} \arrow[ul, "\mu"] \arrow[dl] & & & & & & \\
& & & 0 & & 0 \arrow[ul] & & & & &
\end{tikzcd}$$

mit (1) $\mu\varepsilon = d_0$

(2) die X_q sind e-e freie $\mathbb{Z}[G]$-Moduln

(3) μ, ε, d_q sind G-Modulhomom.

(4) Exaktheit an jeder Stelle.

Die Standardauflösung von $\mathbb{Z}$:

Für $q \geq 1$ definiert man

$$X_q = X_{-q-1} = \underbrace{\bigoplus}_{\text{Summe über alle } q\text{-Zellen}} \mathbb{Z}[G]\underbrace{(\sigma_1, \dots, \sigma_q)}_{q\text{-Zellen}}$$

$\sigma_1, \dots, \sigma_q \in G$

<u>Bspl:</u> $X_1 = X_{-2} \simeq \mathbb{Z}[G]^{|G|}$

$$\rotatebox{90}{$\in$}$$

$$\sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma (\sigma) \quad , \quad \lambda_\sigma \in \mathbb{Z}[G]$$

Setze $X_0 = X_{-1} := \mathbb{Z}[G]$. Wir definieren:

$$\begin{aligned} \varepsilon : X_0 = \mathbb{Z}[G] &\longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{Augmentation} \\ \sigma &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{Z} &\longrightarrow X_{-1} = \mathbb{Z}[G] \quad \text{Koaugmentation} \\ 1 &\longmapsto N_G \end{aligned}$$

Weiter sei $d_0(1) := N_G$

$d_1((\sigma)) := \sigma - 1$

$q \geq 1$ $$\begin{aligned} d_q((\sigma_1, \dots, \sigma_q)) := {} & \sigma_1 (\sigma_2, \dots, \sigma_q) \\ & + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_i \sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \dots, \sigma_q) \\ & + (-1)^q (\sigma_1, \dots, \sigma_{q-1}) \end{aligned}$$

Formeln für d_q, $q < 0$ siehe [Neu, S. 13]

Lemma: Die Standardauflösung ist eine vollständige freie Auflösung von $\mathbb{Z}$.

Beweis: (1) - (3) gelten per Definition.

Die Sequenz

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon} X_0 \xleftarrow{d_1} X_1 \xleftarrow{d_2} X_2 \leftarrow \cdots \quad (*)$$

ist exakt. Das zeigt man durch Rechnung.

Wende auf $(*)$ den Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Z})$ an

$$\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow} \quad 0 \to \underset{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{Z}}}{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_0,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_1,\mathbb{Z}) \to \cdots$$

ist exakt.

Sei $x = (\sigma_1, \ldots, \sigma_q)$ eine q-Zelle. Definiere $x^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_q, \mathbb{Z})$ durch

$$x^*\big(\underbrace{\sigma(\tau_1, \ldots, \tau_q)}_{\text{durchlaufen eine } \mathbb{Z}\text{-Basis von } X_q}\big) := \begin{cases} 1, & \sigma = 1 \,\&\, x = (\tau_1, \ldots, \tau_q) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\tau_1, \ldots, \tau_q \in G$, $\sigma \in G$

Die Abb. $X_q \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_q, \mathbb{Z})$ kann man

$$x \longmapsto x^*$$

$\mathbb{Z}[G]$-linear fortsetzen. Die Fortsetzung ist ein Iso. von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln:

$$(\tau x^*)\big(\sigma(\tau_1,\dots,\tau_q)\big)$$

$$= \tau\big(x^*(\tau^{-1}\sigma(\tau_1,\dots,\tau_q))\big)$$

$$= x^*\big(\tau^{-1}\sigma(\tau_1,\dots,\tau_q)\big)$$

$$= \begin{cases} 1, & \tau = \sigma \;\&\; x = (\tau_1,\dots,\tau_q) \\ 0, & 0 \end{cases}$$

Also ist $\tau(\sigma_1,\dots,\sigma_n)^*$ die $\mathbb{Z}$-duale Basis zur $\mathbb{Z}$-Basis

$$\Big\{ \sigma(\tau_1,\dots,\tau_q) \;\Big|\; \sigma \in G,\ (\tau_1,\dots,\tau_q) \text{ alle } q\text{-Zellen} \Big\}$$

$\Rightarrow$ aus $(*)$ wird durch Dualisieren

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{Z} & \to & X_0 & \to & X_1 & \to & \cdots \\ & & & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ & & & & X_{-1} & & X_{-2} & & \end{array}$$

etc. ∎

Sei A ein G-Modul. Wende $\mathrm{Hom}_G(-,A)$ $= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,A)^G$

auf die Standardauflösung an

$$\begin{tikzcd}
\Rightarrow \ldots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(X_{-2},A) \arrow[r, "\partial_{-1}"] & \mathrm{Hom}_G(X_{-1},A) \arrow[r, "\partial_0"] & \mathrm{Hom}_G(X_0,A) \arrow[d] \\
 & & & \vdots
\end{tikzcd}$$

ist eine Sequenz von G-Moduln

mit

$$(\partial_{q+1} \circ \partial_q)(f) = 0$$

d.h. $\mathrm{im}(\partial_q) \subseteq \ker(\partial_{q+1})$

<u>Notation:</u> $A_q := \mathrm{Hom}_G(X_q, A)$

q-Koketten

$Z_q = Z_q(A) := \ker(\partial_{q+1})$

q-Kozyklen

$B_q = B_q(A) := \mathrm{im}(\partial_q)$

q-Koränder

Def.: $H^q(G,A) := \dfrac{Z_q(A)}{B_q(A)}$

"Tate-Kohomologie-Gruppen"

Ziel: Explizite Beschreibung von $H^q(G,A)$ für $q=-1$, $q=0$, $q=1$, $q=2$