Vorlesung 7

11.5.2020

Kohomologie endlicher Gruppen

G-Moduln

Literatur: Neukirch, KKT, 2011
(Neuausgabe von A. Schmidt)

G ist stets eine endliche Gruppe.

Def.: $\mathbb{Z}[G] := \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in \mathbb{Z} \right\}$

"ganzzahliger Gruppenring".

$\mathbb{Z}[G]$ wird zum Ring mittels

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right)\left(\sum_{h \in G} b_h h\right) := \sum_{g,h} a_g b_h gh$$
$$= \sum_{z \in G} \underbrace{\left(\sum_{gh=z} a_g b_h\right)}_{\in \mathbb{Z}} z$$

Bem: $\mathbb{Z}[G]$ komm. $\iff$ G abelsch

Analog: $R[G]$, R komm. Ring mit 1

<u>Beispiele:</u>

(1) $\begin{array}{c} L \\ | \\ K \end{array} \Big) G$ $\quad L$ ist $\mathbb{Z}[G]$-Modul:

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\alpha := \sum_{g\in G} a_g\, g(\alpha)$$

<u>Analog:</u> L ist ebenso $K[G]$-Modul

$\mathcal{O}_L$ $\qquad \mathbb{Z}[G]$-Modul

$\qquad\qquad \mathcal{O}_K[G]$-Modul

$L^\times$ ist ein $\mathbb{Z}[G]$-Modul:

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\alpha := \prod_{g\in G} g(\alpha)^{a_g}$$

<u>Analog:</u> $\mathcal{O}_L^\times$, I_L, P_L $\mathbb{Z}[G]$-Moduln

Cl_L ist $\mathbb{Z}[G]$-Modul vermöge

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)([\mathfrak{a}]) := \prod_{g\in G} [g(\mathfrak{a})]^{a_g}$$

μ_L ist $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

(2) Seien A, G Gruppen und A abelsch.
Die Sequenz

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "\subseteq"] & E \arrow[r, "\pi"] & G \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "\sigma", "\tilde\sigma"'] & 1 \end{tikzcd}$$

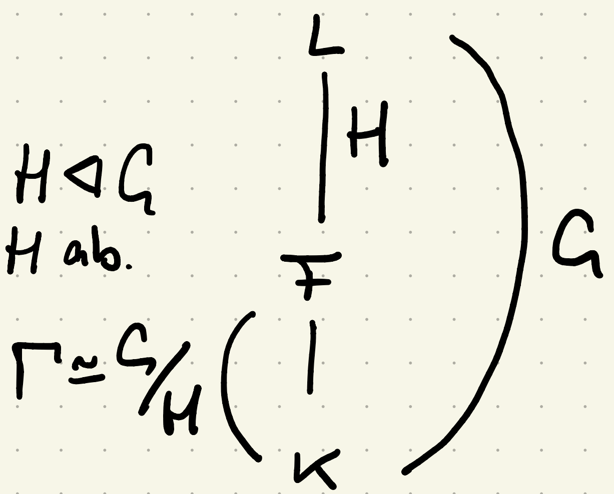
sei exakt. Dann ist A in kanonischer Weise ein G-Modul: Wähle $\sigma : G \to E$ (mengentheoretisch) mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_G$.
und definiere: $\quad g \cdot a := \sigma(g)\, a\, \sigma(g)^{-1}$.

Dies ist unabhängig von σ, <u>denn</u>:

$$\sigma(g) = \tilde\sigma(g)\, a_g \ , \quad a_g \in A, \ \forall g$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(g)\, a\, \sigma(g)^{-1} = \tilde\sigma(g) \underbrace{a_g\, a\, a_g^{-1}}_{=a} \tilde\sigma(g)^{-1} .$$

<u>Speziell</u>:



$$1 \to H \to G \xrightarrow{\mathrm{res}} \Gamma \to 1$$

Γ wirkt auf H, d.h. H ist $\mathbb{Z}[\Gamma]$-Modul.

<u>Def.:</u> (1) Die Abbildung

$$\varepsilon : \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{triviale } \mathbb{Z}[G]\text{-Modul: } g \cdot z := z.$$
$$\sum_{g\in G} a_g g \longmapsto \sum_{g \in G} a_g$$

heißt <u>Augmentation</u>. $\ker(\varepsilon) =: I_G$ heißt <u>Augmentationsideal</u>.

<u>Bem:</u> $\underbrace{\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)}_{=:\lambda} \cdot z = \varepsilon(\lambda) z \qquad z \in \mathbb{Z}$

(2) $N_G := \sum_{g \in G} g \in \mathbb{Z}[G]$ heißt <u>Normelement</u> oder <u>Spurelement</u>. Die Abb.

$$\mu : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[G]$$
$$z \longmapsto z \cdot N_G$$

heißt <u>Koaugmentation</u>. Sei

$$J_G := \operatorname{cok}(\mu) = \mathbb{Z}[G] / \mathbb{Z} \cdot N_G$$

Exakte Sequenzen:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I_G \arrow[r] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mu"] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r] & J_G \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left] & 0 \end{tikzcd}$$

<u>Satz:</u> (1) I_G hat die $\mathbb{Z}$-Basis

$$\{ g-1 \ : \ g \in G \setminus \{1\} \}$$

(2) J_G hat die $\mathbb{Z}$-Basis

$$\{ g + \mathbb{Z}N_G \mid g \in G \setminus \{1\} \}$$

(3) Die Sequenzen zerfallen als $\mathbb{Z}$-Moduln, d.h.

$$\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z} \oplus I_G$$

$$\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z} \oplus J_G \quad \longleftarrow$$

<u>Nur eine Kostprobe zu (3):</u>

$$\sum_{g\in G} a_g g = \sum_{g\in G} (a_g - a_1) g + \sum_{g \in G} a_1 g \qquad \text{mod } \mathbb{Z}N_G$$

$$= \sum_{g\in G} (a_g - a_1) g + a_1 N_G \equiv \sum_{\substack{g \in G \\ g \neq 1}} (a_g - a_1) g \qquad \blacksquare$$

<u>Def.:</u> Sei A ein G-Modul. Dann heißt

$$A^G := \{ a \in A \mid ga = a, \forall g \in G \}$$

<u>Fixmodul</u> und die Teilmenge

$$N_G A := \{ N_G a \mid a \in A \} \leq A^G$$

heißt <u>Normengruppe von A.</u>

Weiter ist

$$_{N_G}A := \{ a \in A \mid N_G a = 0 \} = \ker(N_G)$$

und

$$I_G A = \langle (g-1)a : g \in G \setminus \{1\}, a \in A \rangle_{\mathbb{Z}} = \left\{ \sum_{g \neq 1} a_g (ga - a) \mid a \in A, a_g \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cap\!\!|$$

$$_{N_G}A$$

<u>Interessant:</u> $\quad {}_{N_G}A / I_G A \quad \left(= H^{-1}(G, A) \right)$

$$A^G / N_G A \quad \left(= H^0(G, A) \right)$$

Beispiel: Sei $A = L^\times$

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ K \\ | \\ \mathbb{Q}_p \end{array} \quad \Big) G$$

$$(L^\times)^G = K^\times \supseteq N_G L^\times = N_{L|K}(L^\times)$$

$$\begin{tikzcd} H^0(G, L^\times) \arrow[r, equal] & K^\times / N_{L|K}(L^\times) \arrow[d, "(-, L|K)"] \\ H^{-2}(G, \mathbb{Z}) \arrow[u, dashed, "\mathrm{inv}_{L|K}"', "\simeq"] \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Gal}(L|K) \end{tikzcd}$$

falls $L|K$ ab.

Seien A, B $\mathbb{Z}[G]$-Moduln. Dann ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ wieder ein $\mathbb{Z}[G]$-Modul via

$$(gf)(a) := g(f(g^{-1}a)) \qquad \begin{array}{l} g \in G \\ f : A \to B \\ a \in A \end{array}$$

d.h. $gf := g \circ f \circ g^{-1}$.

Dann gilt: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(A, B) = \mathrm{Hom}_G(A, B)$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)^G.$$

$A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ wird zum G-Modul vermöge

$$g \cdot (a \otimes b) := ga \otimes gb.$$

<u>Warnung:</u> $A^G \otimes_{\mathbb{Z}} B^G \subseteq (A \otimes B)^G$

I. A. gilt hier keine Gleichheit.

<u>Aber:</u> G wirke trivial auf A

$$\Longrightarrow \quad A^G \otimes_{\mathbb{Z}} B^G = A \otimes_{\mathbb{Z}} B^G = (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^G$$

(Übung).

<u>Def.:</u> Ein $\mathbb{Z}[G]$-Modul A heißt <u>frei</u> über $\mathbb{Z}[G]$, falls es einen $\mathbb{Z}[G]$-Isom.

$$f: A \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}[G]$$

(I beliebige Indexmenge)

<u>Beispiel:</u> Satz von der Normalbasis:

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ K \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array} \Big) G \qquad L \simeq K[G] \quad \text{Iso. von } K[G]\text{-Moduln.}$$

$$\lambda \cdot \theta = \sum_{g \in G} a_g g(\theta) \longleftarrow\!\shortmid \lambda = \sum a_g g, \quad a_g \in K$$

θ NB-Element

Sei $\omega_1, \dots, \omega_n$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von K.

Dann ist L $\mathbb{Q}[G]$-frei mit $\mathbb{Q}[G]$-Basis

$$\omega_i \theta \qquad , i = 1, \dots, n = [K : \mathbb{Q}]$$

bzw.

$$\mathbb{Q}[G]^n \xrightarrow{\sim} L \quad \text{(von } \mathbb{Q}[G]\text{-Moduln).}$$

$$(\lambda_i)_{i=1,\dots,n} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\omega_i \theta)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \omega_i \lambda_i(\theta).$$

<u>Frage:</u>

$$G \left(\begin{array}{ccc} L & \supseteq & \mathcal{O}_L \\ | & & \\ K & \supseteq & \mathcal{O}_K \\ | & & \\ \mathbb{Q} & \supseteq & \mathbb{Z} \end{array} \right. \qquad \mathcal{O}_K[G], \ \mathbb{Z}[G]$$

<u>Frage</u> (Fröhlich ~ Ende 1970er)

Ist $\mathcal{O}_L$ $\mathbb{Z}[G]$-frei?

<u>Taylor (1981)</u>

$\mathcal{O}_L$ ist (stabil) frei $/ \mathbb{Z}[G]$, falls die Wurzelzahlklasse (ein analytisches Objekt) trivial ist.

(2) I_G und J_G sind nicht $\mathbb{Z}[G]$-frei.

(3) Sei $p \neq 2$ Pz.

$$\begin{tikzcd} L = \mathbb{Q}(\zeta_p) \arrow[d, dash, "p-1"'] \\ \mathbb{Q} \end{tikzcd} \qquad G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \qquad \sigma_a \leftarrow\!\shortmid \bar{a} \qquad \sigma_a(\zeta_p) = \zeta_p^a$$

$\mathcal{O}_L$ ist $\mathbb{Z}[G]$-frei

denn: $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\zeta_p]$
hat als $\mathbb{Z}$-Basis $1, \zeta_p, \dots, \zeta_p^{p-2}$.
Also ist auch $\zeta_p, \zeta_p^2, \dots, \zeta_p^{p-1}$
eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{O}_L$.

dies sind genau die Konjugierten von ζ_p

bzw. $$\mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}[\zeta_p] = \mathcal{O}_L$$

$$\sum_{\bar{a} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} b_{\sigma_a} \cdot \sigma_a \longmapsto \sum_{\bar{a}} b_{\sigma_a} \sigma_a(\zeta_p) = \sum_{\bar{a}} b_{\sigma_a} \zeta_p^a .$$

Satz: Sei X $\mathbb{Z}[G]$-frei. Sei

$$0 \to A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln.
Dann ist

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathrm{Hom}_G(X,A) & \xrightarrow{h^*} & \mathrm{Hom}_G(X,B) & \xrightarrow{g^*} & \mathrm{Hom}_G(X,C) & \to 0 \\ & f & \longmapsto & h \circ f & & & \end{array}$$

exakt.

Bemerkung: $0 \to \mathrm{Hom}_G(X,A) \xrightarrow{h^*} \mathrm{Hom}_G(X,B) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_G(X,C)$

ist stets exakt.

Beweis: Spezialfall $X = \mathbb{Z}[G]$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G],A) \arrow[r, "h^*"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G],B) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G],C) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "h"] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$f \mapsto f(1)$$

Sei allgemein $X \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}[G]$. Dann folgt die Beh. aus der Additivität von $\mathrm{Hom}_G(X,-)$

$$\mathrm{Hom}_G\Big(\bigoplus_j X_j, A\Big) \xrightarrow{\sim} \prod_j \mathrm{Hom}_G(X_j, A)$$

$$f \longmapsto \left(f|_{X_j}\right)_{j\in J}$$

$$\Big(\sum_{j\in J} x_j \mapsto \sum_{j\in J} f_j(x_j)\Big) \longleftarrow\!\!| \; (f_j)_{j\in J}$$

$\blacksquare$

<u>Ankündigung:</u> Mi, 20.5.2020
keine Vorlesung