Vorlesung 6

6.5.2022

Wiederholung

k $\quad$ v durchläuft die Stellen von k

$\nmid \infty$ $\quad$ $v = \mathfrak{p}$ $\quad$ $U_v = U_{k_v} = U_{k_v}^{(0)} = \mathcal{O}_{k_v}^\times$

$\mathbb{Q}$ $\quad$ $v = \sigma$ $\quad$ $U_v = U_{k_v} = \begin{cases} \mathbb{R}^\times \\ \mathbb{C}^\times \end{cases}$

$$J_k = \{ \alpha = (\alpha_v)_v \mid \alpha_v \in U_v \text{ f.f.a. } v \} \leq \prod_v k_v^\times$$

__Umgebungsbasis der 1:__ Zu jeder endlichen Stellenmenge S nehme man

$$\prod_{v \in S} W_v \times \prod_{v \notin S} U_v$$

durchlaufen eine Umgebungsbasis der 1 in $k_v^\times$

__Notation:__ $\quad i_k : k^\times \hookrightarrow J_k$

$\quad\quad \alpha \longmapsto (\alpha)_v \;\left(= (i_v(\alpha))_v\right)$

"$k^\times = $" $i_k(k^\times) \leq J_k$ Hauptidele

$$\begin{array}{c} K \quad w \\ {\scriptstyle <\infty}\Big| \\ k \quad v \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} K^\times \arrow[r, hook, "i_K"] \arrow[d, "N_{K|k}"] \arrow[dr, phantom, "\mathbin{/\!/\!/}"] & J_K \arrow[r] \arrow[d, dashed, "N_{K|k}"] & C_K := J_K/K^\times \arrow[d, "N_{K|k}"] \\ k^\times \arrow[r, hook, "i_k"] & J_k \arrow[r] & C_k \end{tikzcd}$$

$$\alpha = (\alpha_w)_w \,, \quad N_{K|k}(\alpha) = (\beta_v)_v$$

$$\beta_v = \prod_{w|v} N_{K_w|k_v}(\alpha_w)$$

C_K, C_k <u>Idelklassengruppen</u>

Sei $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \mathfrak{m}_\infty$. Sei

$$J_k(\mathfrak{m}) = \{\alpha = (\alpha_v)_v \mid \alpha \equiv 1 \ (\mathrm{mod}^* \ \mathfrak{m})\} \leq J_k$$

d.h. $\begin{cases} v_{\mathfrak{p}}(\alpha_{\mathfrak{p}} - 1) \geq v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}_0), & \forall \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_0 \\ \alpha_v > 0, & \forall v \mid \mathfrak{m}_\infty \end{cases}$

<u>Def.:</u> $C_k(\mathfrak{m}) := J_k / k^\times J_k(\mathfrak{m})$ Strahlklassengruppe mod $\mathfrak{m}$

$$\begin{tikzcd}
J_k \arrow[r] \arrow[d, dash] & C_k \arrow[r] \arrow[d, dash] & C_k(m) \arrow[d, dash] \\
k^\times J_k(m) \arrow[r] \arrow[d, dash] & \frac{k^\times J_k(m)}{k^\times} \arrow[r] \arrow[d, dash] & 1 \\
k^\times \arrow[r] & 1 &
\end{tikzcd}$$

Für $V \leq J_k$ sei $V_m := V \cap J_k(m)$.

<u>Gezeigt:</u> $J_k(m) / k^\times_m \overset{\sim}{\hookrightarrow\!\!\!\rightarrow} J_k / k^\times = C_k$

$$\begin{tikzcd}
J_k(m) \arrow[r, two heads] \arrow[d, dash] & C_k = J_k / k^\times \arrow[d, dash] \\
\left(k^\times N_{K|k}(J_K)\right)_m \arrow[r] \arrow[d, dash] & \frac{k^\times N_{K|k}(J_K)}{k^\times} \arrow[d, dash] \\
k^\times_m \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

—— Ende Wiederholung ——

Def.: Der Homom.

$$c : J_k \longrightarrow I_k$$
$$\alpha = (\alpha_v)_v \longmapsto \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\alpha_{\mathfrak{p}})} =: (\alpha) = c(\alpha)$$

heißt **Inhalt**.

Bem: $v_{\mathfrak{p}}(\alpha_{\mathfrak{p}}) = 0$ f.f.a. $\mathfrak{p}$

Satz: Sei $K|k$ eine abelsche Erweiterung. Dann induziert c einen Isomorphismus

$$J_k(\mathfrak{m}) \big/ \left(k^\times N_{K|k}(J_K)\right)_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\ c\ } I_k(\mathfrak{m}) \big/ P_k(\mathfrak{m})\, N_{K|k}(I_K(\mathfrak{m}_0))$$

Beweis: Siehe Lang, Kap. VII, §.4 ∎

K
$|$ ab.
k

$f_{K|k} \mid \mathfrak{m}$

$$\begin{tikzcd}
 & \dfrac{J_k(\mathfrak{m})}{(k^\times N_{K|k}(J_K))_{\mathfrak{m}}} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \dfrac{I_k(\mathfrak{m})}{P_k(\mathfrak{m}) N_{K|k}(I_K(\mathfrak{m}_0))} \arrow[d, "\simeq"', "{(-,K|k)}"] \\
 & J_k / k^\times N_{K|k}(J_K) \arrow[r, dashed, "\Theta", "\simeq"'] & \mathrm{Gal}(K|k) \\
J_k \arrow[ur] \arrow[urr, dashed, "{(-,K|k)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Artin symbol (idealtheoretisch)

Bemerkung: 1) Hängt nicht von $\mathfrak{m}$ ab.

2) Sei $\alpha = (\alpha_v)_v \in J_k$ und $K|k$ sei mod $\mathfrak{m}$ definiert. Finde mit dem Approximationssatz $\beta \in k^\times$ mit

$$\beta\alpha \in J_k(\mathfrak{m}).$$

Sei $\mathfrak{a} = c(\beta\alpha)$. Dann gilt:

$$(\mathfrak{a}, K|k) = (\alpha, K|k)$$

Satz: (1) Sei $K|k$ eine abelsche Erweiterung von Zahlkp. Dann induziert

$$(-, K|k) : J_k \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K|k)$$

einen Iso.

$$\frac{C_k}{N_{K|k}(C_K)} = J_k / k^\times N_{K|k}(J_K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K|k).$$

(2) Zu jeder offenen Untergruppe H mit $k^\times \leq H \leq J_k$ von endlichem Index gibt es genau eine abelsche Erweiterung $K|k$ mit $H = k^\times N_{K|k}(J_K) = \ker\big((-, K|k)\big)$.

__Bemerkung:__

1) Auch $\quad (-, K|k): \quad J_k/k^\times \longrightarrow Gal(K|k)$

$$J_k/k^\times = C_k$$

2)
$$\begin{tikzcd}
J_k \arrow[r] \arrow[d, dash, "<\infty"'] & C_k \arrow[d, dash, "<\infty"] \\
H \arrow[r] \arrow[d, dash] & U \arrow[d, dash] \\
k^\times \arrow[r, dash] & 1
\end{tikzcd}$$

3) Seien $k^\times \le H_1, H_2 \le J_k$ offene U'gr. von endlichem Index und K_1, K_2 die zugehörigen Klassenkp. Dann gilt:

(i) $\quad H_1 \le H_2 \iff K_1 \supseteq K_2$

(ii) $\quad H_1 H_2 \longleftrightarrow K_1 \cap K_2$

(iii) $\quad H_1 \cap H_2 \longleftrightarrow K_1 K_2$

(iv)

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & K \\
k \arrow[r] \arrow[d] & kM \arrow[ur] \arrow[d] & \\
k\cap M \arrow[r] \arrow[d] & M & \\
F & &
\end{tikzcd}$$

$k|F$ Erweiterung von Zahlkp.

M/F ab.

$K|k$ ab. mit $M \subseteq K$

Dann gilt für $\alpha \in J_k$:

$$(\alpha, K|k)\big|_M = \left(N_{k|F}(\alpha), M/F\right).$$

Zusammenhang zum Lokalen:

Sei $K|k$ eine Galoiserweit. von Zkp. mit $\mathrm{Gal}(K|k) = G$.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
\mathfrak{P} \arrow[d] & & & K_{\mathfrak{P}} \ni \alpha \arrow[d, "ef"] \\
\tilde{\mathfrak{p}} \arrow[d] & & K \arrow[ur] \arrow[d, "Z"] \arrow[dd, bend right, "G"'] & k_{\mathfrak{p}} \\
\mathfrak{p} & & K^Z \arrow[ur] \arrow[d] & \\
 & & k &
\end{tikzcd}$$

$Z = Z(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) = \{\sigma \in G \mid \sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\}$

Es gilt:

$$\varphi : Z \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}|k_{\mathfrak{p}})$$
$$\sigma \longmapsto (\alpha \mapsto \sigma(\alpha))$$

Hier sei $\alpha \in K_{\mathfrak{p}}$ repräsentiert durch die CF $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha_n \in K$.

Dann wird $\sigma(\alpha)$ repräsentiert durch die CF $(\sigma(\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Sei $K|k$ abelsch und

$$\begin{aligned} z_v : k_v^\times &\hookrightarrow J_k \\ \xi &\longmapsto (\ldots, 1, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stelle zu } v}}{\xi}, 1, \ldots) \end{aligned}$$

Man kann zeigen:

$$(z_v(\xi), K|k) \in Z_v \quad \text{Zerlegungsgruppe zu } v.$$

und

$$\underbrace{\varphi\big((z_v(\xi), K|k)\big)}_{\mathrm{Gal}(K_w|k_v)} = (\xi, K_w|k_v).$$

Diagramm: Sei $v = \mathfrak{p}$.

$$\begin{tikzcd}
k_{\mathfrak{p}}^{\times} \arrow[r, hook] \arrow[d, "{(-,\, K_{\mathfrak{P}}|k_{\mathfrak{p}})}"'] & J_k \arrow[d, "{(-,\, K|k)}"] \\
\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}|k_{\mathfrak{p}}) \arrow[r, "\varphi^{-1}"] & Z_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathrm{Gal}(K|k)
\end{tikzcd}$$

$$Z_{\mathfrak{p}} = Z$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & K_{\mathfrak{P}} \arrow[d, dash] \\
K \arrow[ur, dash, "\iota_{\mathfrak{P}}"] \arrow[d, dash] & k_{\mathfrak{p}} \\
k_{\mathfrak{p}} \cap K = K^{Z} \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash] & \\
k &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}|k_{\mathfrak{p}}) &\xrightarrow{\ \varphi^{-1}\ } Z \\
\tau &\longmapsto \left(K \ni \alpha \longmapsto \iota_{\mathfrak{P}}^{-1}\big(\tau(\iota_{\mathfrak{P}}(\alpha))\big)\right)
\end{aligned}$$

Satz: Sei $K|k$ endlich abelsch und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathcal{O}_k$. Dann:

$\mathfrak{p}$ ist unverzweigt in $K|k$

$$\iff z_{\mathfrak{p}}(U_{\mathfrak{p}}) \subseteq k^\times N_{K|k}(J_K)$$

Beweis:

„$\Rightarrow$" $K_{\mathfrak{P}}|k_{\mathfrak{p}}$ sind für alle $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ unverzweigt

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{P} & K \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & K_{\mathfrak{P}} \arrow[d, dash, "ef"] \\ \mathfrak{p} & k \arrow[r, dash] & k_{\mathfrak{p}} \end{tikzcd}$$

$$e = e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{p})$$
$$f = f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$$

Bekannt: $K_{\mathfrak{P}}|k_{\mathfrak{p}}$ unverzweigt $\iff N_{K_{\mathfrak{P}}|k_{\mathfrak{p}}}(U_{\mathfrak{P}}) = U_{\mathfrak{p}}$

Daraus folgt: $z_{\mathfrak{p}}(U_{\mathfrak{p}}) \subseteq k^\times N_{K|k}(J_K)$. ∎

„$\Leftarrow$" Sei $\xi \in U_{\mathfrak{p}}$. Dann gilt:

$$(z_{\mathfrak{p}}(\xi), K|k) = 1$$
$$\Rightarrow (\xi, K_{\mathfrak{P}}|k_{\mathfrak{p}}) = 1$$
$$\Rightarrow \xi \in \ker((-, K_{\mathfrak{P}}|k_{\mathfrak{p}})) = N_{K_{\mathfrak{P}}|k_{\mathfrak{p}}}(K_{\mathfrak{P}}^\times)$$

$$\xi \in N_{K_{\mathfrak{P}}|k_{\mathfrak{p}}}(U_{\mathfrak{P}})$$
$$\Uparrow$$