

# Vorlesung 6

---


6.5.2020

---

---

---

---



# Wiederholung

$k$   $v$  durchläuft die Stellen von  $k$   
 $k < \infty$   $v = \emptyset$   $U_v = U_{k_v} = U_{k_v}^{(0)} = \mathcal{O}_{k_v}^*$   
 $\mathbb{Q}$   $v = \emptyset$   $U_v = U_{k_v} = \begin{cases} \mathbb{R}^* \\ \mathbb{C}^* \end{cases}$

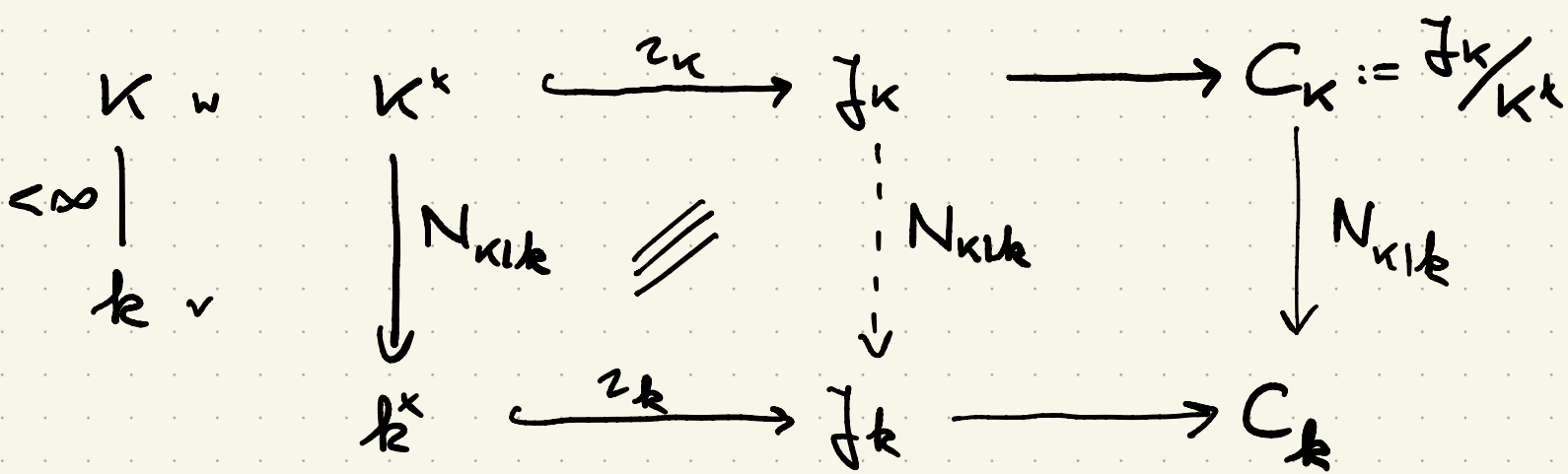
$$J_k = \left\{ \alpha = (\alpha_v)_v \mid \alpha_v \in U_v \text{ f.f.a. } v \right\} \leq \prod_v k_v^*$$

Umgebungsbasis dt 1: Zu jeder endlichen  
Stellenmenge  $S$  nehme man

$$\prod_{v \in S} W_v \times \prod_{v \notin S} U_v$$

durchlaufen eine Umgebungsbasis  
dt 1 in  $k_v^*$

Notation:  $z_k: k^* \hookrightarrow J_k$   
 $\alpha \mapsto (\alpha)_v (= (z_v(\alpha))_v)$   
"  $k^* = z_k(k^*) \leq J_k$  Hauptideale



$$\alpha = (\alpha_w)_w, \quad N_{K|k}(\alpha) = (\beta_v)_v$$

$$\beta_v = \prod_{w|v} N_{K_w|k_v}(\alpha_w)$$

$C_K, C_k$  Isotrialsengruppen

Sei  $m = m_0 m_\infty$ . Sei

$$J_k(m) = \left\{ \alpha = (\alpha_v)_v \mid \alpha \equiv 1 \pmod{*m} \right\} \leq J_k$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d.h. } \int_{\mathfrak{f}} v_{\mathfrak{f}} (\alpha_{\mathfrak{f}} - 1) \geq v_{\mathfrak{f}}(m_0), \forall \mathfrak{f} \mid m_0 \\ \alpha_v > 0 \end{array} \right\} \forall v \mid m_\infty$$

Def.:  $C_k(m) := J_k / K^* J_k(m)$  Strahlklassen-  
gruppe mod  $m$

$$\begin{array}{ccccc}
 J_k & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & C_k(m) \\
 | & & | & & | \\
 k^x J_k(m) & \longrightarrow & \frac{k^x J_k(m)}{k^x} & \longrightarrow & 1 \\
 | & & | & & | \\
 k^x & \longrightarrow & 1 & & 
 \end{array}$$

Für  $V \leq J_k$  sei  $V_m := V \cap J_k(m)$ .

Gezeigt:  $J_k(m) \xrightarrow{\cong} J_k / k^x = C_k$

$$\begin{array}{ccc}
 J_k(m) & \longrightarrow & C_k = J_k / k^x \\
 | & & | \\
 (k^x N_{k|k}(J_k))_m & \longrightarrow & \frac{k^x N_{k|k}(J_k)}{k^x} \\
 | & & | \\
 k_m^x & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

———— Ende Wiederholung ————

Def.: Der Normen.

$$c: J_k \rightarrow I_k$$

$$\alpha = (\alpha_v) \mapsto \prod_{\mathfrak{f}|\mathfrak{p}} \mathfrak{f}^{v_{\mathfrak{f}}(\alpha_{\mathfrak{f}})} =: (\alpha)$$

$$= c(\alpha)$$

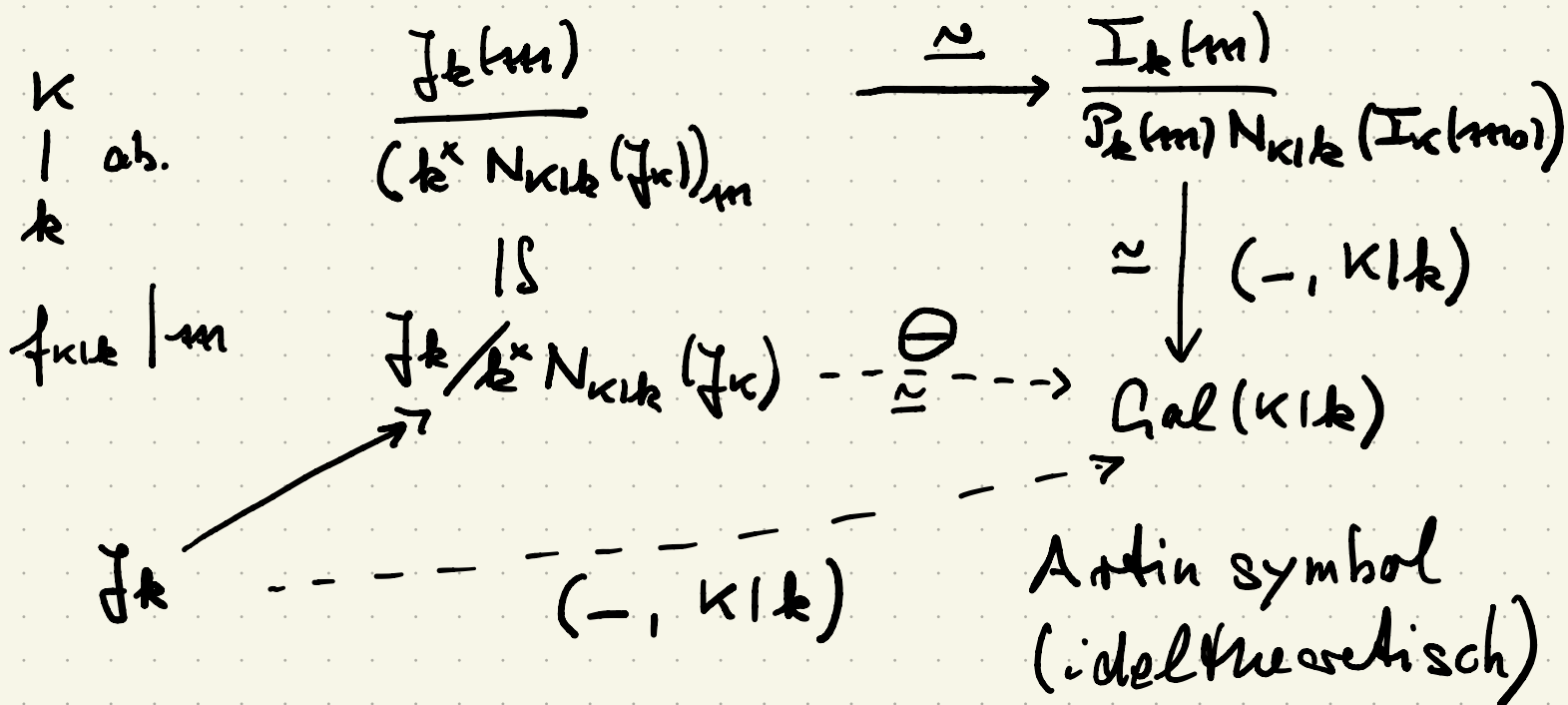
heißt Inhalt.

Bem.:  $v_{\mathfrak{f}}(\alpha_{\mathfrak{f}}) = 0$  f. f. a.  $\mathfrak{f}$

Satz: Sei  $K|k$  eine abelsche Erweiterung.  
Dann induziert  $c$  einen Isomorphismus

$$\frac{J_k(m)}{(k^\times N_{K|k}(J_k))_m} \xrightarrow{c} \frac{I_k(m)}{\mathcal{P}_k(m) N_{K|k}(I_k(m))}$$

Beweis: Siehe Lang, Kap. VN, §.4  $\blacksquare$



Bemerkung: 1) Hängt nicht von  $m$  ab.

2) Sei  $\alpha = (\alpha_v)_v \in \mathbb{F}_k$  und  $K|k$  sei  
mod  $m$  definiert. Finde mit dem  
Approximationssatz  $\beta \in k^\times$  mit

$$\beta\alpha \in \mathbb{F}_k(m).$$

Sei  $\alpha' = c(\beta\alpha)$ . Dann gilt:

$$(\alpha', K|k) = (\alpha, K|k)$$

Satz: (1) Sei  $K|k$  eine abelsche Erweiterung  
von Zahlkörper. Dann induziert

$$(-, K|k): \mathbb{F}_k \longrightarrow \text{Gal}(K|k)$$

einen Iso.

$$\frac{C_k}{N_{K|k}(C_k)} \cong \frac{\mathbb{F}_k}{k^\times N_{K|k}(\mathbb{F}_k)} \xrightarrow{\cong} \text{Gal}(K|k).$$

(2) Zu jeder offenen Untergruppe  $H$   
mit  $k^\times \leq H \leq \mathbb{F}_k$  von endlichem Index  
gibt es genau eine abelsche Erweiterung  $K|k$   
mit  $H = k^\times N_{K|k}(\mathbb{F}_k) = \ker(-, K|k)$ .

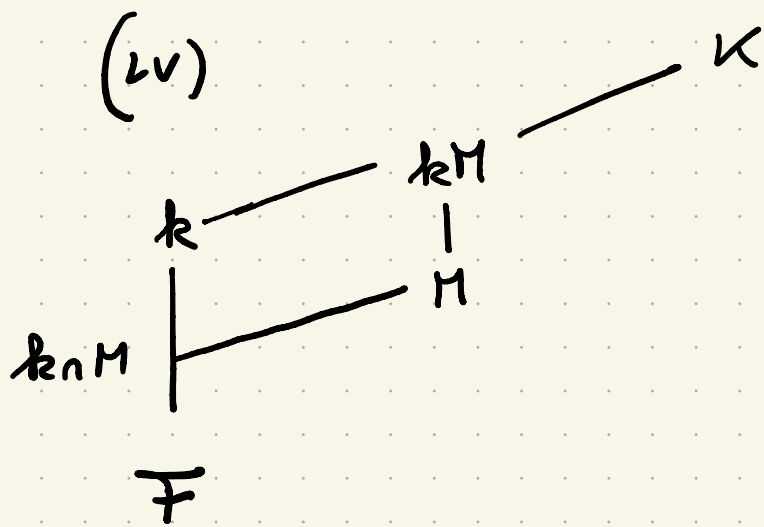
## Bemerkung:

1) Auch  $(-, \kappa|_k)$ :  $\mathbb{J}_k / k^\times \longrightarrow \text{Gal}(\kappa|k)$   
=  $C_k$

2) 
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{J}_k & \longrightarrow & C_k \\ | & & | \\ H & \longrightarrow & U \\ | & & | \\ k^\times & \longrightarrow & 1 \end{array} < \infty$$

3) Seien  $k^\times \leq H_1, H_2 \leq \mathbb{J}_k$  offene U'gr. von endlichem Index und  $K_1, K_2$  die zugehörigen Kleinstkörper. Dann gilt:

- (i)  $H_1 \leq H_2 \iff K_1 \supseteq K_2$
- (ii)  $H_1 H_2 \iff K_1 \cap K_2$
- (iii)  $H_1 \cap H_2 \iff K_1 K_2$



$k/F$  Erweiterung von Zahlkorp.

$M/F$  ab.

$K|k$  ab. mit

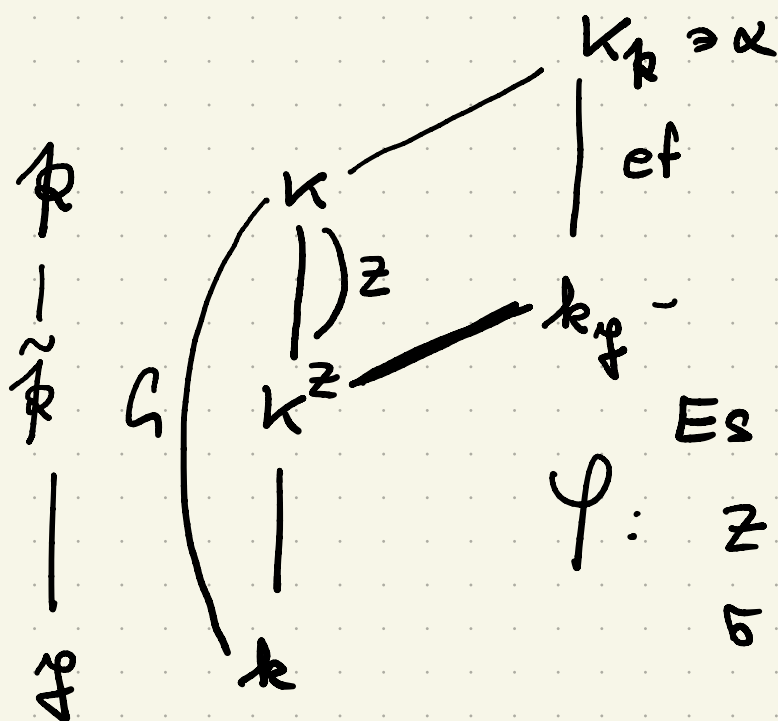
$$M \subseteq K$$

Dann gilt für  $\alpha \in \bar{k}$ :

$$(\alpha, K|k) \Big|_M = (N_{k/F}(\alpha), M/F)$$

### Zusammenhang zum Lokalen:

Sei  $K|k$  eine Galoisweiterg von Zkorp.  
mit  $\text{Gal}(K|k) = G$ .



$$Z = Z(k̄̄̄̄̄̄) = \{ \sigma \in G \mid \sigma(k̄̄̄̄̄̄) = k̄̄̄̄̄̄ \}$$

Es gilt:

$$Z \xrightarrow{\cong} \text{Gal}(K_p | k̄̄̄̄̄̄̄) \quad (\alpha \mapsto \sigma(\alpha))$$



Hier sei  $\alpha \in K_p$  repräsentiert durch

die CF  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\alpha_n \in K$ .

Dann wird  $\bar{\sigma}(\alpha)$  repräsentiert durch

die CF  $(\bar{\sigma}(\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$ .

Sei  $K|k$  abelsch und

$$z_v: k_v^\times \longleftrightarrow J_k$$

$$\xi \longmapsto (\dots, 1, \xi, 1, \dots)$$

$\uparrow$  Stelle zu  $v$

Man kann zeigen:

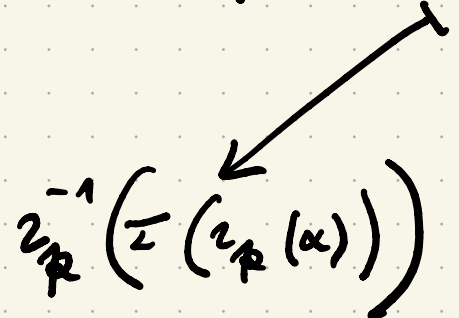
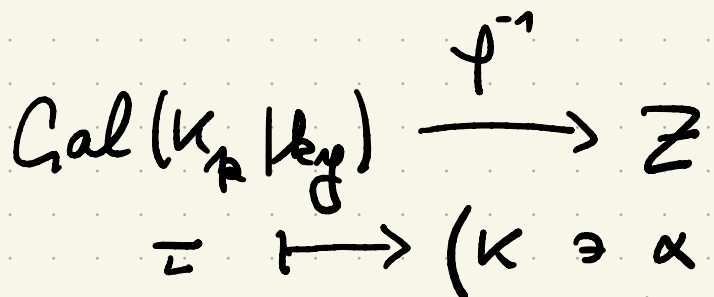
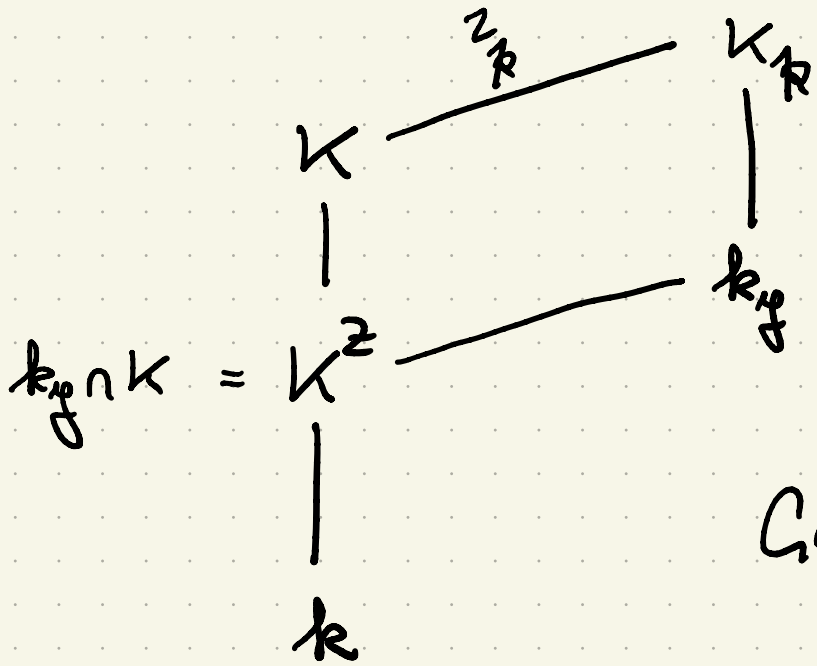
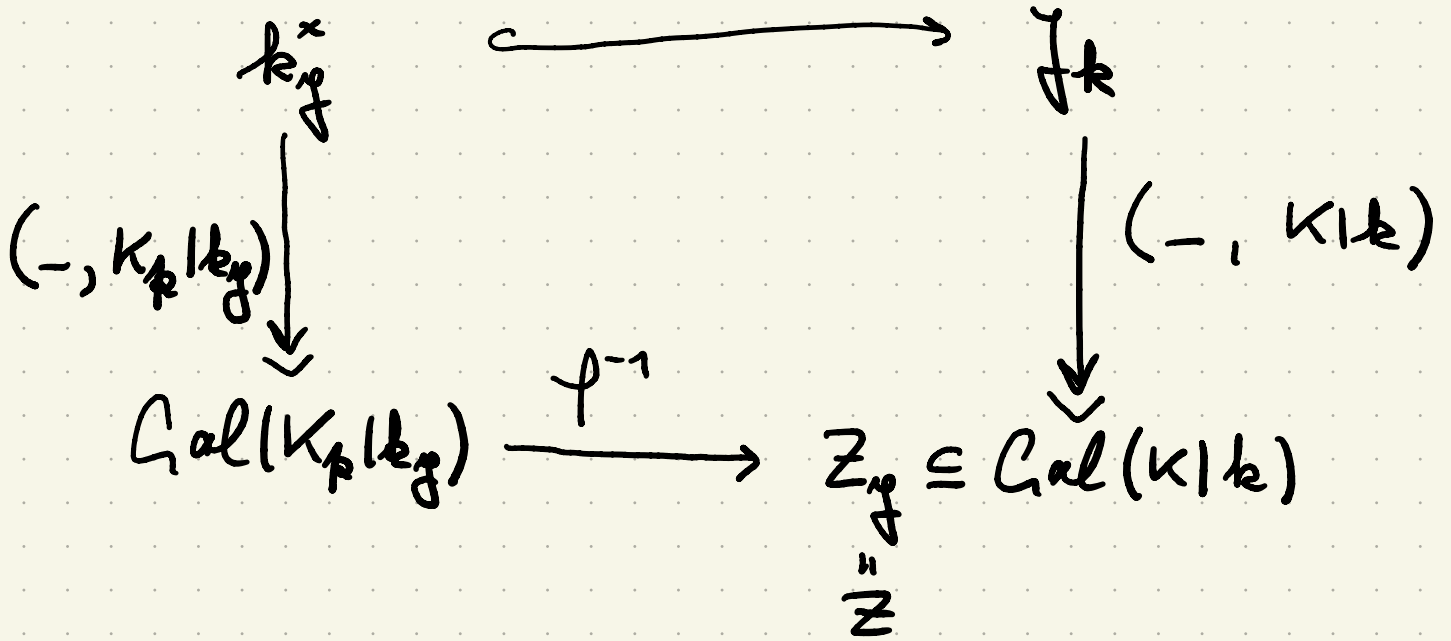
$$(z_v(\xi), K|k) \in Z_v \quad \text{Zerlegungsgruppe zu } v.$$

und

$$\underbrace{\mathcal{P}((z_v(\xi), K|k))}_{\text{Gal}(K_w|k_v)} = (\xi, K_w|k_v).$$

Diagramm:

Sei  $v = \varphi$ .



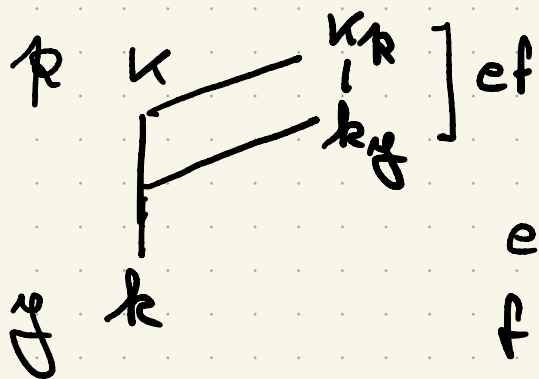
Satz: Sei  $K|k$  endlich abelsch und  $\gamma$  ein Primideal von  $\mathcal{O}_K$ . Dann:

$\gamma$  ist unverzweigt in  $K|k$

$$\Leftrightarrow z_\gamma(\mathcal{U}_\gamma) \subseteq k^\times N_{K|k}(\mathcal{I}_\gamma)$$

Beweis:

$\Rightarrow$   $K_\mathfrak{p}|k_\gamma$  sind für alle  $\mathfrak{p}|\gamma$  unverzweigt



$$e = e(\mathfrak{p}|k_\gamma) = e(\mathfrak{p}|k)$$

$$f = f(\mathfrak{p}|k_\gamma) = f(\mathfrak{p}|k)$$

Bekannt:  $K_\mathfrak{p}|k_\gamma$  unverzweigt  $\Leftrightarrow N_{K_\mathfrak{p}|k_\gamma}(\mathcal{U}_\mathfrak{p}) = \mathcal{U}_\mathfrak{p}$

Daraus folgt:  $z_\gamma(\mathcal{U}_\gamma) \subseteq k^\times N_{K|k}(\mathcal{I}_\gamma)$ .

$\Leftarrow$  Sei  $\xi \in \mathcal{U}_\gamma$ . Dann gilt:

$$(z_\gamma(\xi), K|k) = 1$$

$$\xi \in N_{K_\mathfrak{p}|k_\gamma}(\mathcal{U}_\mathfrak{p})$$

$$\Rightarrow (\xi, K_\mathfrak{p}|k_\gamma) = 1$$

$$\Rightarrow \xi \in \text{Ker}(f, K_\mathfrak{p}|k_\gamma) = N_{K_\mathfrak{p}|k_\gamma}(K_\mathfrak{p}^\times)$$

