

Vorlesung 6

6.5.2020



Wiederholung

k v durchläuft die Stellen von k
 $k < \infty$ $v = \emptyset$ $U_v = U_{k_v} = U_{k_v}^{(0)} = \mathcal{O}_{k_v}^*$
 \mathbb{Q} $v = \emptyset$ $U_v = U_{k_v} = \begin{cases} \mathbb{R}^* \\ \mathbb{C}^* \end{cases}$

$$J_k = \left\{ \alpha = (\alpha_v)_v \mid \alpha_v \in U_v \text{ f.f.a. } v \right\} \leq \prod_v k_v^*$$

Umgebungsbasis dt 1: Zu jeder endlichen
Stellenmenge S nehme man

$$\prod_{v \in S} W_v \times \prod_{v \notin S} U_v$$

durchlaufen eine Umgebungsbasis
dt 1 in k_v^*

Notation: $z_k: k^* \hookrightarrow J_k$
 $\alpha \mapsto (\alpha)_v (= (z_v(\alpha))_v)$
" $k^* = z_k(k^*) \leq J_k$ Hauptideale

$$\begin{array}{ccccc}
 J_k & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & C_k(m) \\
 | & & | & & | \\
 k^x J_k(m) & \longrightarrow & \frac{k^x J_k(m)}{k^x} & \longrightarrow & 1 \\
 | & & | & & | \\
 k^x & \longrightarrow & 1 & &
 \end{array}$$

Für $V \leq J_k$ sei $V_m := V \cap J_k(m)$.

Gezeigt: $J_k(m) \xrightarrow{\cong} J_k / k^x = C_k$

$$\begin{array}{ccc}
 J_k(m) & \longrightarrow & C_k = J_k / k^x \\
 | & & | \\
 (k^x N_{k|k}(J_k))_m & \longrightarrow & \frac{k^x N_{k|k}(J_k)}{k^x} \\
 | & & | \\
 k_m^x & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

———— Ende Wiederholung ————

Bemerkung: 1) Hängt nicht von m ab.

2) Sei $\alpha = (\alpha_v)_v \in \mathbb{F}_k$ und $\kappa|_k$ sei mod m definiert. Finde mit dem Approximationssatz $\beta \in k^\times$ mit

$$\beta\alpha \in \mathbb{F}_k(m).$$

Sei $\alpha_1 = c(\beta\alpha)$. Dann gilt:

$$(\alpha_1, \kappa|_k) = (\alpha, \kappa|_k)$$

Satz: (1) Sei $\kappa|_k$ eine abelsche Erweiterung von Zahlkörper. Dann induziert

$$(-, \kappa|_k): \mathbb{F}_k \longrightarrow \text{Gal}(\kappa|_k)$$

einen Iso.

$$\frac{C_k}{N_{\kappa|_k}(C_k)} \cong \frac{\mathbb{F}_k}{k^\times N_{\kappa|_k}(\mathbb{F}_k)} \xrightarrow{\cong} \text{Gal}(\kappa|_k).$$

(2) Zu jeder offenen Untergruppe H mit $k^\times \leq H \leq \mathbb{F}_k$ von endlichem Index gibt es genau eine abelsche Erweiterung $\kappa|_k$ mit $H = k^\times N_{\kappa|_k}(\mathbb{F}_k) = \ker(-, \kappa|_k)$.

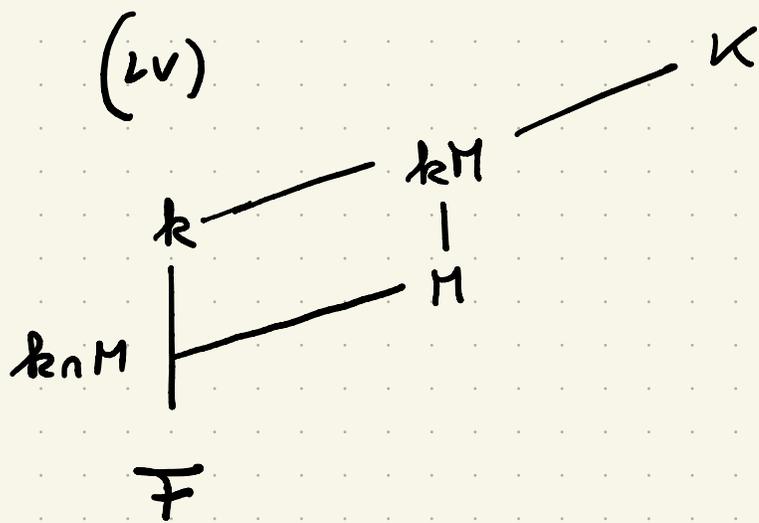
Bemerkung:

1) Auch $(-, \kappa|_k)$: $\mathbb{J}_k / k^\times \longrightarrow \text{Gal}(\kappa|_k)$
= C_k

$$2) \quad < \infty \quad \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{J}_k & \longrightarrow & C_k \\ | & & | \\ H & \longrightarrow & U \\ | & & | \\ k^\times & \longrightarrow & 1 \end{array} \right) < \infty$$

3) Seien $k^\times \leq H_1, H_2 \leq \mathbb{J}_k$ offene U'gr.
von endlichem Index und K_1, K_2
die zugehörigen Kleinstkörper. Dann gilt:

- (i) $H_1 \leq H_2 \iff K_1 \supseteq K_2$
- (ii) $H_1 H_2 \iff K_1 \cap K_2$
- (iii) $H_1 \cap H_2 \iff K_1 K_2$



k/F Erweiterung von Zahlkorp.

M/F ab.

$K|k$ ab. mit

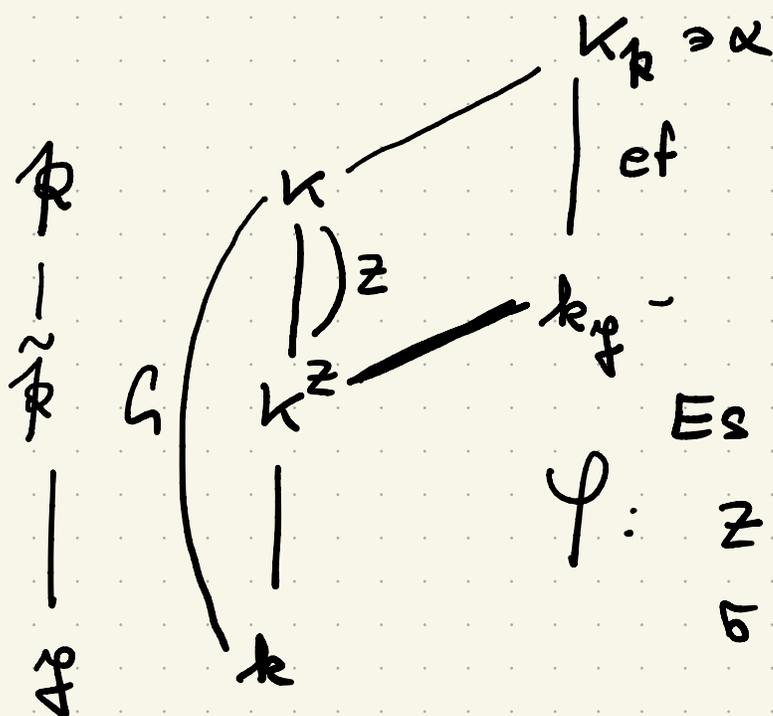
$$M \subseteq K$$

Dann gilt für $\alpha \in \bar{k}$:

$$(\alpha, K|k) \Big|_M = (N_{k/F}(\alpha), M/F)$$

Zusammenhang zum Lokalen:

Sei $K|k$ eine Galoisweiterg von Zkorp.
mit $\text{Gal}(K|k) = G$.



$$Z = Z(k|k) = \{\sigma \in G \mid \sigma(k) = k\}$$

Es gilt:

$$Z \xrightarrow{\cong} \text{Gal}(K_p|k_p) \quad (\alpha \mapsto \sigma(\alpha))$$

Hier sei $\alpha \in K_p$ repräsentiert durch

die CF $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha_n \in K$.

Dann wird $\bar{\sigma}(\alpha)$ repräsentiert durch

die CF $(\bar{\sigma}(\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Sei $K|k$ abelsch und

$$z_v: k_v^\times \longleftrightarrow J_k$$

$$\xi \longmapsto (\dots, 1, \xi, 1, \dots)$$

\uparrow Stelle zu v

Man kann zeigen:

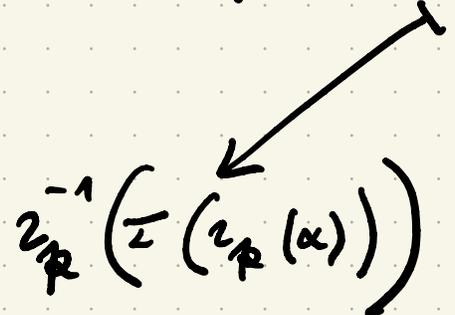
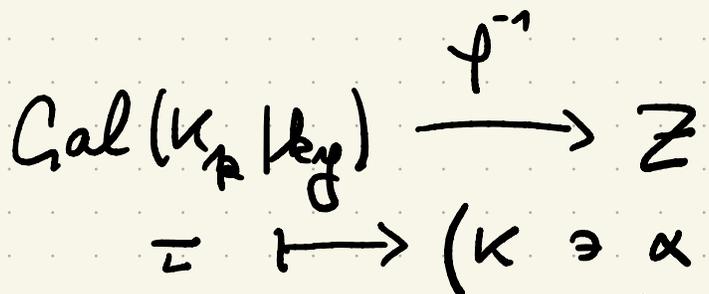
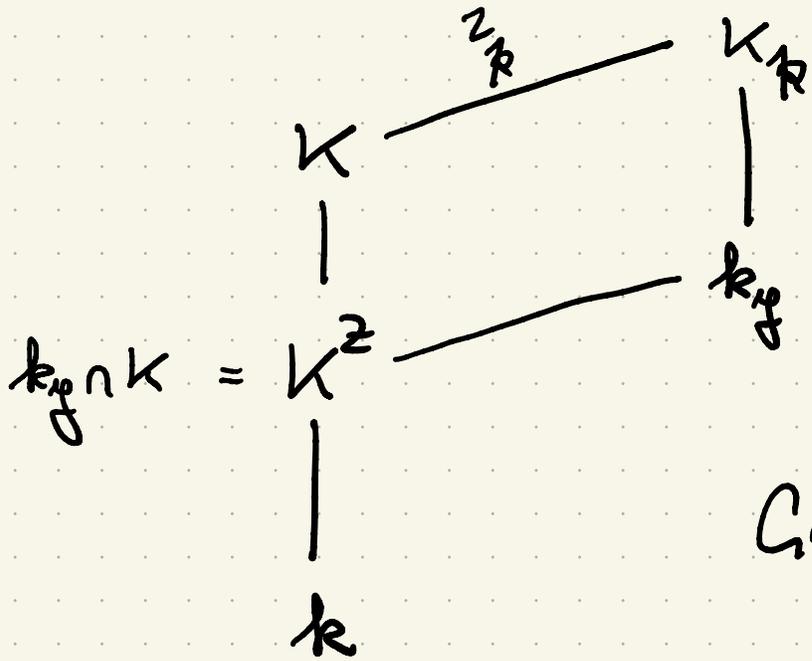
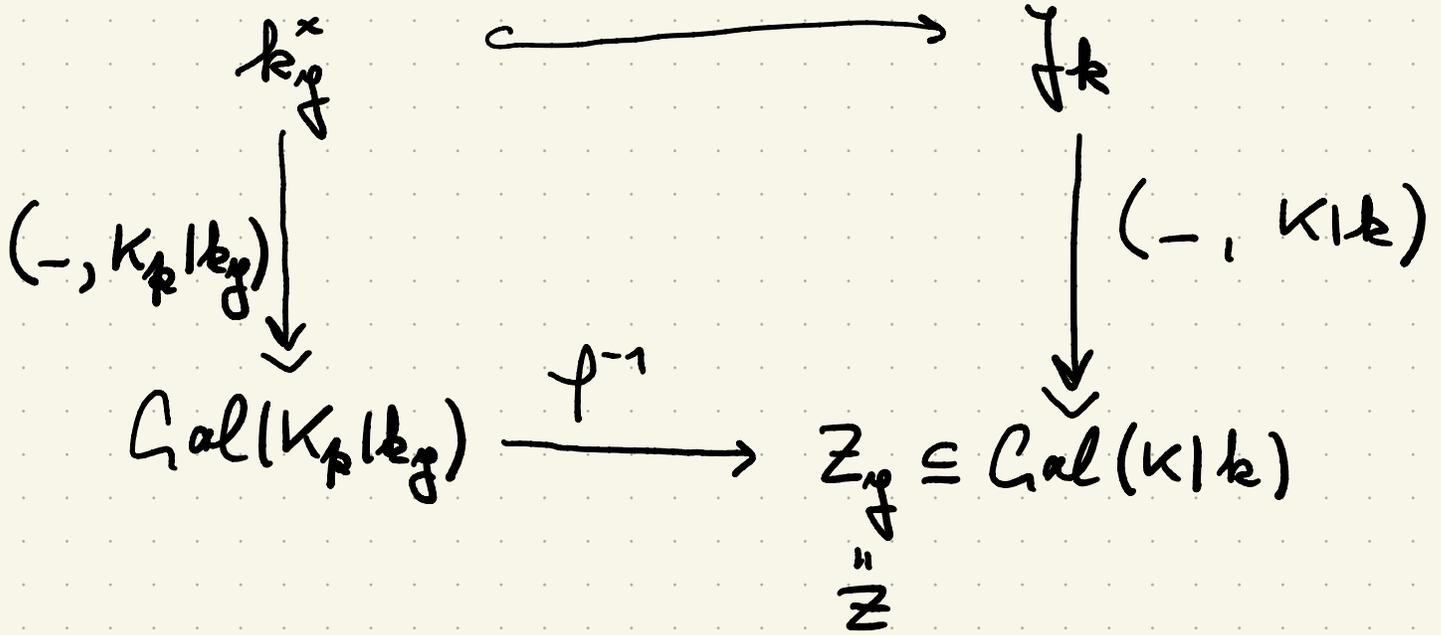
$$(z_v(\xi), K|k) \in Z_v \quad \text{Zerlegungsgruppe zu } v.$$

und

$$\underbrace{\mathcal{P}((z_v(\xi), K|k))}_{\text{Gal}(K_w|k_v)} = (\xi, K_w|k_v).$$

Diagramm:

Sei $v = \varphi$.



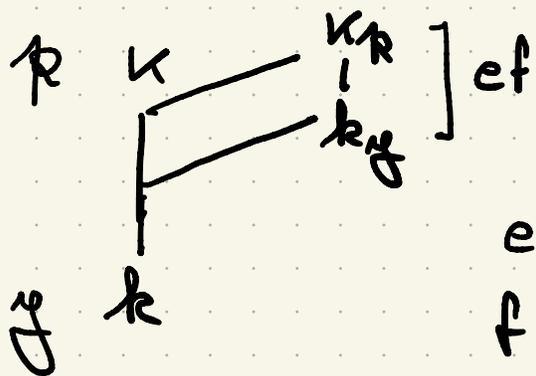
Satz: Sei $K|k$ endlich abelsch und φ ein Primideal von \mathcal{O}_K . Dann:

φ ist unverzweigt in $K|k$

$$\Leftrightarrow z_{\varphi}(U_{\varphi}) \subseteq k^{\times} N_{K|k}(f_{\varphi})$$

Beweis:

\Rightarrow $K_{\mathfrak{p}}|k_{\varphi}$ sind für alle $\mathfrak{p}|\varphi$ unverzweigt



$$e = e(\mathfrak{p}|k) = e(\varphi)$$

$$f = f(\mathfrak{p}|k) = f(\varphi)$$

Bekannt: $K_{\mathfrak{p}}|k_{\varphi}$ unverzweigt $\Leftrightarrow N_{K_{\mathfrak{p}}|k_{\varphi}}(U_{\mathfrak{p}}) = U_{\varphi}$

Daraus folgt: $z_{\varphi}(U_{\varphi}) \subseteq k^{\times} N_{K|k}(f_{\varphi})$.

\Leftarrow Sei $\xi \in U_{\varphi}$. Dann gilt:

$$(z_{\varphi}(\xi), K|k) = 1$$

$$\xi \in N_{K_{\mathfrak{p}}|k_{\varphi}}(U_{\mathfrak{p}})$$

$$\Rightarrow (\xi, K_{\mathfrak{p}}|k_{\varphi}) = 1$$

$$\Rightarrow \xi \in \text{Ker}(f, K_{\mathfrak{p}}|k_{\varphi}) = N_{K_{\mathfrak{p}}|k_{\varphi}}(K_{\mathfrak{p}}^{\times})$$

