Vorlesung 5

4.5.2020

Wiederholung

$$k \supseteq \mathcal{O}_k \supseteq \mathfrak{p}_k = \pi_k \mathcal{O}_k$$

$e f \mid f, e$

$\mathbb{Q}_p$

$$\alpha \in k^\times \Longrightarrow \alpha = \pi_k^{v_k(\alpha)} u, \; u \in \mathcal{O}_k^\times$$

Zusammenhänge:

$$\mathcal{O}_k = \{ \alpha \in k \mid v_k(\alpha) \geq 0 \} = \{ \alpha \in k \mid |\alpha|_k \leq 1 \}$$

$= \text{ganzer Abschluss von } \mathbb{Z}_p \text{ in } k$

$$\mathfrak{p}_k = \{ \alpha \in k \mid \quad > \quad\quad\quad < $$

$$|\alpha|_k = N_{k|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-v_{\mathfrak{p}}(\alpha)} = p^{-f v_k(\alpha)}$$

Einseinheiten: $\quad \mathcal{U}_k^{(n)} := 1 + \mathfrak{p}_k^n, \qquad n \geq 1$

$$\mathcal{U}_k^{(0)} := \mathcal{O}_k^\times$$

"Kugeln um 1"

LKKT:

$\{ K|k$ endlich und abelsch $\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \{ N \leq k^\times$ offen von endlichem Index $\}$

- inklusionsumkehrend

Falls $K \longleftrightarrow N$, so gilt:

- $$k^\times / N \xrightarrow{(-, K|k)} Gal(K|k)$$
- $$N = N_{K|k}(K^\times)$$

Erinnerung:
- $G_0 = I = \{\sigma \in Gal(K|k) \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}_K}\}$
- $\begin{array}{c} K \\ \mid e, f \\ k \end{array}$ $\quad \mathfrak{p}_k \mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_K^e$, $\quad f = [\bar{K} : \bar{k}]$
- $|G_0| = e$

Satz:
$$\begin{array}{ccc} U_k^{(0)} / N_{K|k}(U_K^{(0)}) & \xrightarrow{\simeq} & G_0 \\ \cap & & \cap \\ k^\times / N_{K|k}(K^\times) & \xrightarrow{\simeq} & Gal(K|k) \end{array}$$

Hierbei: induziert vom Artinsymb. $(-, K|k)$

$$K \longleftrightarrow N = N_{K|k}(K^\times)$$
$<\infty$, ab. $\mid$
k

Bemerkung: Dies läßt sich verallgemeinern für höhere Verzweigungsgruppen. (Serre, Local fields)

Folgerung: Sei $K|k$ endlich abelsch. Dann gilt:

$$K|k \text{ unverzweigt} \iff N_{K|k} : \mathcal{O}_K^\times \to \mathcal{O}_k^\times$$
ist surjektiv.

Definition: Sei $K|k$ endlich abelsch und $\mathcal{N} = N_{K|k}(K^\times)$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ minimal mit

$$\mathcal{U}_k^{(n)} \subseteq \mathcal{N}.$$

Dann nennt man $\mathfrak{f}_k^n$ der Führer oder Konduktor von $K|k$ oder $\mathcal{N}$.

Beispiele: 1) Sei $K|k$ unverzweigt vom Grad f. (Bez.: $K = K_f$). Bekannt:

$$\mathrm{Gal}(K|k) = \langle \varphi \rangle \;, \; \varphi = \text{Frob.}$$

Dann gehört $K|k$ zu

$$(\pi_k^f)^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{O}_k^\times \leq k^\times$$

2) Sei $p \neq 2$ und $k = \mathbb{Q}_p$. Wir werden zeigen:

$$\mathcal{N} = p^{\mathbb{Z}} \times (1 + p^{n+1}\mathbb{Z}_p) \;, \; \left| k^\times / \mathcal{N} \right| = \varphi(p^{n+1})$$

korrespondiert $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}})$

3) $k = \mathbb{Q}_p$, $\quad N = p^{\mathbb{Z}} \times \mu_{p-1} \times (1+p^{n+1}\mathbb{Z}_p)$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, leftrightarrow] \\ K \end{tikzcd}$$

, wobei

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}}) \arrow[d, dash, "p-1"] \arrow[dd, dash, bend right=60, "(p-1)p^n"'] & \longleftrightarrow & p^{\mathbb{Z}} \times (1+p^{n+1}\mathbb{Z}_p) \arrow[d, dash, "p-1"] \\
K \arrow[d, dash, "p^n"] & & N \arrow[d, dash] \\
\mathbb{Q}_p & \longleftrightarrow & \mathbb{Q}_p^{\times}
\end{tikzcd}$$

Globale KKT (idealtheoretisch)

Literatur: Cassou-Noguès / Taylor

$$\begin{tikzcd} k \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

k Zkp., v Stelle von k

k_v sei die Komplettierung von k bei v.

v endlich $\Rightarrow$ $v = \mathfrak{p}$ und k_v ein p-adischer Zahlkp.

v archimedisch $\Rightarrow$ $v = \sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$

und $k_v = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$

<u>Einseinheiten:</u>

$v = \mathfrak{p}$ $\quad U_v := U_{k_v} := U_{k_v}^{(0)} = \mathcal{O}_{k_v}^\times$

$v = \sigma$ $\quad U_v := U_{k_v} = \begin{cases} \mathbb{R}^\times \\ \mathbb{C}^\times \end{cases}$

<u>Def.:</u> Die Gruppe

$$J_k := \left\{ \alpha = (\alpha_v)_v \in \prod_v k_v^\times \;\middle|\; \alpha_v \in U_v \text{ für fast alle } v \right\}$$

heißt <u>Idelgruppe</u> von k. Die Untergruppe

$$U_k := \prod_v U_v$$

nennt man Untergruppe der Einheitsidele.

<u>Bemerkung:</u> $J_k = \mathbb{A}_k^\times$, wobei

$$\mathbb{A}_k := \left\{ \alpha = (\alpha_v)_v \in \prod_v k_v \;\middle|\; \alpha_v \in \mathcal{O}_{k_v} \text{ für fast alle } v \right\}$$

"Adelring"

J_k wird eine topologische Gruppe. Die "Kugeln um 1" sind gegeben durch

$$\prod_{v \in S} W_v \times \prod_{v \notin S} U_v \leq J_k ,$$ S endliche Menge von Stellen von k

wobei S alle endlichen Mengen wie hier und W_v die "Kugeln um 1" in $k_v^\times$ durchläuft.

Sei $v = \mathfrak{p}$: $\quad i_v = i_\mathfrak{p} : k \hookrightarrow k_v = k_\mathfrak{p}$

$\alpha \longmapsto$ konstante CF $(\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ mod Nullfolgen.

$v = \sigma : \quad i_v = \sigma : k \hookrightarrow \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$

Betrachte $\quad i_k : k^\times \longrightarrow J_k$ (diagonal)

$$\alpha \longmapsto (i_v(\alpha))_v$$

dies ist fast immer eine Einheit, <u>denn</u>:

$\alpha \mathcal{O}_k = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{e_s} \Rightarrow i_v(\alpha)$ ist Einheit, $\forall \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$, $i = 1, \ldots, s$

$\iota_k(k^\times) \le J_K$ sind die sog. <u>Hauptidele</u>.

<u>Übung</u>: $\iota_k(k^\times) \le k^\times$ ist diskret.

Sei v_0 eine Stelle von k. Dann

$$\begin{aligned} k_{v_0}^\times &\hookrightarrow J_k \\ \alpha_0 &\longmapsto (\dots,1,\alpha_0,1,\dots) \end{aligned}$$

Stelle zu v_0

Sei
$$\begin{array}{ccc} w & & K \\ & & \mid {\scriptstyle <\infty} \\ \downarrow & & k \\ v & & \mid {\scriptstyle <\infty} \\ & & \mathbb{Q} \end{array}$$

$$N_{K|k} : J_K \longrightarrow J_k$$
$$x = (x_w)_w \longrightarrow y = (y_v)_v$$

mit
$$y_v := \prod_{w|v} N_{K_w|k_v}(x_w)$$

$$\begin{array}{cc} \mathfrak{P} & K \\ \mid & \mid \\ v=\mathfrak{p} & k \end{array} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{c} K_{\mathfrak{P}} \\ \mid \\ k_{\mathfrak{p}} \end{array}\right) e = e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}),\ f = f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})$$

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_K = \mathfrak{P}^e \mathfrak{a},$$
$$\mathfrak{P} \nmid \mathfrak{a}.$$

$$
\begin{tikzcd}
K^\times \arrow[r, hook, "i_K"] \arrow[d, "N_{K|k}"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & J_K \arrow[d, "N_{K|k}"] \\
k^\times \arrow[r, hook, "i_k"] & J_k
\end{tikzcd}
\qquad (*)
$$

kommutiert.

<u>Definition:</u> Sei k ein Zahlkp. Dann heißt $C_k := J_k / i_k(k^\times) = J_k / k^\times$

<u>Idelklassengruppe.</u>

Wegen $(*)$ induziert $N_{K|k}$ eine <u>Normabbildung</u> $N_{K|k} : C_K \longrightarrow C_k$.

<u>Def.:</u> (1) Sei $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \mathfrak{m}_\infty$ und $\alpha = (\alpha_v)_v \in J_k$. Dann schreibt man

$$\alpha \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}^* \, \mathfrak{m})$$

falls gilt: i) $v_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p} - 1) \geq v_\mathfrak{p}(\mathfrak{m}_0)$, $\quad \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_0$

ii) $\alpha_v > 0$, $\quad v \mid \mathfrak{m}_\infty$

(2) Die Untergruppe

$$J_k(\mathfrak{m}) := \{\alpha = (\alpha_v)_v \in J_k \mid \alpha \equiv 1 \,(\mathrm{mod}^* \mathfrak{m})\}$$

heißt <u>Strahl mod $\mathfrak{m}$.</u>

(3) Die Gruppe $C_k(\mathfrak{m}) := J_k / k^* J_k(\mathfrak{m})$

heißt <u>Strahlklassengruppe</u> mod $\mathfrak{m}$.

<u>Notation:</u> Sei $V \leq J_k$ und $\mathfrak{m}$ ein Divisor. Dann $V_{\mathfrak{m}} := V \cap J_k(\mathfrak{m})$

<u>Bspl:</u> $k^*_{\mathfrak{m}} = k^* \cap J_k(\mathfrak{m})$

<u>Lemma:</u> $J_k(\mathfrak{m}) / k^*_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\cong} J_k / k^* \ni \alpha \cdot k^*$

<u>Beweis:</u> Es ist zu zeigen, dass

$$\begin{tikzcd} J_k(\mathfrak{m}) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"] & J_k \arrow[r] & J_k / k^* \end{tikzcd}$$

φ surjektiv ist. $\left(\ker(\varphi) = k^*_{\mathfrak{m}} = k^* \cap J_k(\mathfrak{m}) \right.$ ist klar.$\left.\right)$

Sei $\alpha = (\alpha_v)_v \in J_k$. <u>Zu zeigen:</u> es gibt $\beta \in k^\times$ mit $\beta\alpha \in J_k(\mathfrak{m})$.

$$\Updownarrow$$

$$v_\mathfrak{p}(\beta\alpha_\mathfrak{p} - 1) \geq v_\mathfrak{p}(\mathfrak{m}_0) \qquad \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_0$$

$$\Leftrightarrow |\beta\alpha_\mathfrak{p} - 1|_\mathfrak{p} \leq N_{k|\mathbb{Q}_p}(\mathfrak{p})^{-v_\mathfrak{p}(\mathfrak{m}_0)}$$

$$\Leftrightarrow |\beta - \alpha_\mathfrak{p}^{-1}|_\mathfrak{p} \leq \frac{N_{k|\mathbb{Q}_p}(\mathfrak{p})^{-v_\mathfrak{p}(\mathfrak{m}_0)}}{|\alpha_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p}} =: \varepsilon_\mathfrak{p}$$

Falls $v = \sigma \mid \mathfrak{m}_\infty$, $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Hier muß gelten: $\operatorname{sgn}(\sigma(\beta)) = \operatorname{sgn}(\alpha_\sigma)$.

Wähle $\varepsilon < \min\left\{ \varepsilon_\mathfrak{p}, \frac{|\alpha_\sigma|}{2} : \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_0, \sigma \mid \mathfrak{m}_\infty \right\}$

Für $v \mid \mathfrak{m}$ wähle $a_v \in k$ mit

$$|a_v - \alpha_v^{-1}|_v < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finde mit dem Approximationsatz $\beta \in k^\times$ mit $|\beta - a_v|_v < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall v \mid \mathfrak{m}$

Δ-Ungl. $\Longrightarrow$ $|\beta - \alpha_v^{-1}| < \varepsilon$

für alle $v \mid \mathfrak{m}$. Also $\beta\alpha \in J_k(\mathfrak{m})$.

$\blacksquare$