Vorlesung 4

23.4.2020

Wiederholung

$\mathfrak{m}$ Divisor von k

$$\begin{tikzcd}
I_k(\mathfrak{m}) \arrow[r] \arrow[d, dash] & Cl_k(\mathfrak{m}) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dash] & k \arrow[d, dash] \\
H \arrow[r] \arrow[d, dash] & \overline{H} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dash] & \text{Klassenkp. zu } H \text{ Bez: } k_H \arrow[d, dash] \\
P_k(\mathfrak{m}) \arrow[r] & 1 \arrow[r, leftrightarrow] & k(\mathfrak{m})
\end{tikzcd}$$

Strahlklassenkp. mod $\mathfrak{m}$

Es gilt:

$$Gal(k_H|k) \cong I_k(\mathfrak{m})/H \cong Cl_k(\mathfrak{m})/\overline{H}$$

$$(\mathfrak{a}, k_H/k) \leftarrow\!\shortmid\ \mathfrak{a}H \leftarrow\!\shortmid\ \mathfrak{a}P_k(\mathfrak{m}) \bmod \overline{H}$$

<u>Spezialfälle:</u>

- $H = P_k(\mathfrak{m}) \rightsquigarrow k(\mathfrak{m})$
- $\mathfrak{m} = (1)$. Dann heißt $k(1)$ <u>Hilbertscher Klassenkp.</u>
  Es gilt: $k(1)$ ist die maximal abelsche <u>unverzweigte</u> Erweiterung von k

- $\mathrm{Gal}(k(\mathfrak{m})/k) \simeq Cl_k(\mathfrak{m})$, insbesondere
  $\mathrm{Gal}(k(1)/k) \simeq Cl_k$

<u>Satz:</u> $K|k$ Klassenkp. zu $H \leq I_k(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathcal{O}_k$ prim mit $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$. Dann:

$$f_{\mathfrak{p}} := [\overline{K} : \overline{k}] = \mathrm{ord}(\mathfrak{p}H)$$

$$\text{in } \frac{I_k(\mathfrak{m})}{H} \simeq \mathrm{Gal}(k(\mathfrak{m})|k)$$

<u>Speziell:</u> $K = k(1)$

$\mathrm{ord}(\mathfrak{p}P_k) = 1 \iff f_{\mathfrak{p}} = 1 \iff \mathfrak{p}$ voll zerlegt in $k(1)|k$

$\Updownarrow$

$\mathfrak{p}$ ist Hauptideal ("Hauptidealsatz")

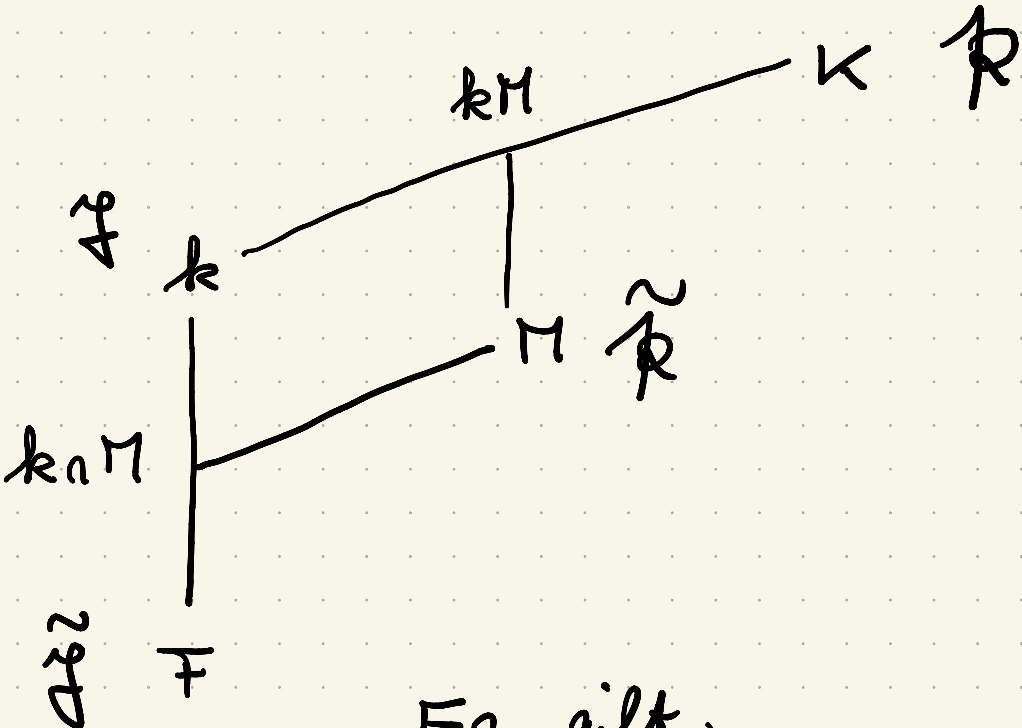
<u>Folgerung:</u> Jede abelsche Erweiterung $K|k$ ist in einem Strahlklassenkp. enthalten.

<u>Genauer:</u> $K \subseteq k(\mathfrak{f})$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_{K|k}$.

<u>Folgerung:</u> (Satz von Kronecker-Weber)
Jede abelsche Erweiterung $K|\mathbb{Q}$ ist in einem Kreisteilungskp. $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ enthalten.

<u>Beweis:</u> $\mathbb{Q}(\mathfrak{I}_n) = \mathbb{Q}(n\infty)$. $\blacksquare$

<u>Situation:</u>



M/F abelsch

K|k abelsch

$\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap k$ etc.

Es gilt:

$$\mathrm{Gal}(K|k) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{Gal}(M/k\cap M) \subseteq \mathrm{Gal}(M/F)$$

<u>Vor:</u> $\mathfrak{P}$ ist unverzweigt in K/F

Sei $f = [\bar{k} : \bar{F}]$, wobei $\bar{k} = \mathcal{O}_k/\mathfrak{p}$ usw.

Dann gilt: $N_{k|F}(\mathfrak{p}) = \tilde{\mathfrak{p}}^f$ und

$$\left(\sigma_{\mathfrak{p}}^{K|k}\Big|_M\right)(\alpha) \equiv \alpha^{N\mathfrak{p}} \pmod{\underbrace{\mathfrak{P}\cap\mathcal{O}_M}_{=\tilde{\mathfrak{P}}}}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}_M$$

$$\left(N_{k|F}(y),\, M|F\right) = \left(\tilde{y}^f,\, M|F\right)$$
$$= \left(\tilde{y},\, M|F\right)^f$$
$$= \left(\sigma_{\tilde{y}}^{M|F}\right)^f$$

$$\left(\sigma_{\tilde{y}}^{M|F}\right)^f(\alpha) \equiv \alpha^{(N\tilde{y})^f} \pmod{\tilde{\mathfrak{p}}},$$
$$\forall \alpha \in \mathcal{O}_F$$

Es folgt also:

$$(y,\, K|k)\Big|_M = \left(N_{k|F}(y),\, M|F\right)$$

bzw. $$\boxed{(\mathfrak{a},\, K|k)_M = \left(N_{k|F}(\mathfrak{a}),\, M|F\right)}$$

falls $(\mathfrak{a},\, f_{K|k}) = 1$.

Anwendung:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & K=k(1) \\
 & kF(1) \arrow[ur, dash] & \\
k \arrow[ur, dash] & & \\
 & M=F(1) \arrow[uu, dash] & \\
F \arrow[uu, dash] \arrow[ur, dash] & &
\end{tikzcd}$$

Vor: $k \cap F(1) = F$
($\Leftrightarrow$ $k|F$ hat keine echte unverzweigte Teilerweiterung)

$\mathrm{Gal}(k(1)|k) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(F(1)|F)$

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Cl_k \arrow[r, "{(-,\, k(1)|k)}", "\simeq"'] \arrow[d, "N_{k|F}"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/\!/\!/"] & \mathrm{Gal}(k(1)|k) \arrow[d, two heads, "\mathrm{res}"] \\
Cl_F \arrow[r, "{(-,\, F(1)|F)}", "\simeq"'] & \mathrm{Gal}(F(1)|F)
\end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei

$$N_{k|F} : Cl_k \longrightarrow Cl_F$$
$$\mathfrak{a} P_k \longmapsto N_{k|F}(\mathfrak{a})\, P_F$$

<u>Satz:</u> Falls $k|F$ keine unverzweigte Teilerweiterung L/F mit $L \neq F$ enthält, so ist $N_{k|F}$ surjektiv. Insbesondere gilt: $h_F \mid h_k$

<u>Anwendung:</u> Falls $k|F$ Primzahlgrad hat und es gibt eine voll verzweigte Stelle, so folgt $h_F \mid h_k$.

Lokale KKT

p Pz.

$$\begin{array}{ccccc} k & \supseteq & \mathcal{O}_k & \supseteq & \mathfrak{p}_k = \pi_k \mathcal{O}_k, \\ \text{ef} \Big| <\infty & & \Big| & & \\ \mathbb{Q}_p & \supseteq & \mathbb{Z}_p & \supseteq & p\mathbb{Z}_p \end{array}$$

<u>das</u> max. Ideal

π_k Primelement

dvr

$v_{\mathbb{Q}_p} = v_p : \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$

$v_p(0) = \infty$

$|\alpha|_p := p^{-v_p(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{Q}_p^\times$

Auf $k^\times$:

$$|\alpha|_k := \left(N_{k|\mathbb{Q}_p}(\mathfrak{p}_k)\right)^{-v_k(\alpha)} \qquad \alpha \in k^\times$$

<u>Hierbei:</u> $k^\times \ni \alpha = \pi_k^{v_k(\alpha)} u$, $u \in \mathcal{O}_k^\times$

Es gilt: • $p\mathcal{O}_k = \mathfrak{p}_k^e$ und

$$v_k|_{\mathbb{Q}_p} = e v_p$$

• $|\alpha|_k = p^{f v_k(\alpha)}$

wobei $f = [\bar{k} : \bar{\mathbb{Q}}_p] = [\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}_k : \mathbb{F}_p]$

$k^\times$ ist eine topologische Gruppe:

$$U_k^{(n)} := 1 + \mathfrak{p}_k^n, \quad n \geq 1$$

$$U_k^{(0)} := \mathcal{O}_k^\times$$

$$\mathcal{O}_k^\times = U_k^{(0)} \supseteq U_k^{(1)} \supseteq U_k^{(2)} \supseteq \dots$$

$$\cong (\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}_k)^\times \qquad \cong \mathcal{O}_k/\mathfrak{p}_k$$

Die $U_k^{(n)}$ bilden eine Umgebungsbasis der 1. Ausführlich: $V \subseteq k^\times$ offen

$$:\Longleftrightarrow \forall v \in V \; \exists n \in \mathbb{N} : \; v\, U_k^{(n)} \subseteq V$$

Es gilt:

$$k^\times \cong \pi_k^{\mathbb{Z}} \times U_k^{(0)} \cong \pi_k^{\mathbb{Z}} \times \mu_{q-1} \times U_k^{(1)}$$

$$q = |\bar{k}| = p^f$$

Satz:

(1) Sei $K|k$ eine endliche abelsche Erweiterung. Dann gibt es einen kanonischen surjektiven Homomorphismus

$$(\_\,, K|k) : k^\times \twoheadrightarrow Gal(K|k)$$

mit $ker((\_\,, K|k)) = N_{K|k}(K^\times)$

($N_{L|k}(K^\times) \leq k^\times$ ist offen und von endlichem Index)

Falls $K|k$ unverzweigt ist, so gilt:

$$(a, K|k) = \sigma_{K|k}^{v_k(a)}, \quad \forall a \in k^\times$$

wobei $\sigma_{K|k}$ den Frobenius bezeichnet.

(2) Sei $H \leq k^\times$ eine offene Untergruppe von endlichem Index. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte abelsche Erweiterung $K|k$ so daß $H = N_{K|k}(K^\times)$.

Es gilt dann:

$$k^\times/H \xrightarrow[\simeq]{(\_\,, K|k)} Gal(K|k)$$

Erläuterung:

$$
ef \left(\begin{array}{ccccc}
K & \supseteq & \mathcal{O}_K & \supseteq & \mathfrak{P} \\
| & & | & & | \\
k & \supseteq & \mathcal{O}_k & \supseteq & \mathfrak{p} \\
| & & & & \\
\mathbb{Q}_p & & & &
\end{array} \right.
$$

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_K = \mathfrak{P}^e$$

$$f = [\overline{K} : \overline{k}]$$

$$0 \to \underset{\overset{\shortparallel}{I}}{G_0} \to \mathrm{Gal}(K|k) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{K}|\overline{k}) \to 0$$

wobei $G_0 = I = \left\{ \sigma \in \mathrm{Gal}(K|k) \;\middle|\; \sigma(\alpha) \equiv \alpha \bmod \mathfrak{P}, \ \forall \alpha \in \mathcal{O}_K \right\}$

Es gilt: $e = |G_0|$

Also

$$\mathrm{Gal}(K|k) \cong \mathrm{Gal}(\overline{K}|\overline{k})$$
$$\sigma_{K|k} \longmapsto \varphi$$

falls $K|k$ unverzweigt ist ($\Leftrightarrow e = 1$)

Bemerkung:

Untergruppen $N \leq k^\times$, die offen und von endlichem Index sind $\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ endliche ab. Erweiterungen $K|k$

Satz: Seien $N_1, N_2 \leq k^\times$ offen und von endlichem Index. Seien K_1, K_2 die entsprechenden Klassenkörp. Dann gilt:

(1) $N_1 \leq N_2 \iff K_1 \supseteq K_2$

(2) $N_1 \cap N_2 \longleftrightarrow K_1 K_2$

(3) $N_1 N_2 \longleftrightarrow K_1 \cap K_2$