# Vorlesung 25 (letzte Vorlesung)

20.7.2020

# Der Existenzsatz

Leicht:

$$\left.\begin{array}{c} L \\ | \\ K \end{array}\right] \text{abelsch (normal)} \implies I_L := N_{L|K}(L^\times)$$

ist offen und von endlichem Index

Die Umkehrung ist der sogenannte

Existenzsatz: Sei $I \leq K^\times$ offen und $[K^\times : I] = m < \infty$

Dann ist $I$ eine Normengruppe, d.h. es $L/K$ abelsch mit $N_{L|K}(L^\times) = I$.

Beweis: $[K^\times : I] = m \implies K^{\times m} \leq I \leq K^\times$

Es genügt zu zeigen: $K^{\times m}$ ist Normengruppe

Wir nehmen zunächst an, daß

$$\mu_m \subseteq K^\times.$$

Wir wenden nun Kummertheorie an.

Sei $a \in K^\times$. Bez.: $L_a := K(\sqrt[m]{a})$

Sei $L := \prod_{a \in K^\times/K^{\times m}} L_a$. Da $|K^\times/K^{\times m}| < \infty$, ist

$L|K$ eine endliche abelsche Erweiterung.

Beh: $\quad N_{L|K}(L^\times) = K^{\times m}$

Bew: Aus der allgemeinen Theorie ([Stucky, Satz 3.39]) wissen wir

$$N_{L|K}(L^\times) =: I_L = I_{\prod_a L_a} = \bigcap_a I_{L_a} \qquad \text{[ZthI, Prop. 8.1.1]}$$

Es gilt: $\quad [L_a : K] = [K(\sqrt[m]{a}) : K] =: d$

$$/\!/$$

$$\operatorname{ord}(aK^{\times m}) \text{ in } K^\times / K^{\times m}$$

also ist $d$ ein Teiler von $m$.

$$\Rightarrow \quad K^{\times m} \subseteq K^{\times d} \subseteq I_{L_a} = N_{L_a|K}(L_a^\times),$$

denn: $\quad \alpha \in K \Rightarrow N_{L_a|K}(\alpha) = \alpha^d$

$$\Rightarrow \quad K^{\times m} \subseteq I_L$$

Kummertheorie $\Rightarrow [K^\times : K^{\times m}] = |\operatorname{Gal}(L|K)|$

$$= [K^\times : I_L]$$

$$\Rightarrow \quad K^{\times m} = I_L$$

Zum allgemeinen Fall: $\quad$ Sei $K_1 := K(\mu_m)$.

Sei $L_1 | K_1$, so daß $\quad K_1^{\times m} = N_{L_1|K_1}(L_1^\times)$

Sei $\tilde{L}/L_1$ endlich, so daß $\tilde{L}/K$ galoissch ist.

$$\left.\begin{array}{c} \tilde{L} \\ | \\ L_1 \\ | \\ K_1 = K(\mu_m) \\ | \\ K \end{array}\right) \text{gal.}$$

Dann gilt:

$$N_{\tilde{L}/K}(\tilde{L}^\times) = N_{K_1/K}\, N_{\tilde{L}/K_1}(\tilde{L}^\times)$$

$$\subseteq N_{K_1/K}\left(N_{L_1/K_1}(L_1^\times)\right)$$

$$= N_{K_1/K}\left(K_1^{\times m}\right)$$

$$= \left(N_{K_1/K}(K_1^\times)\right)^m \subseteq K^{\times m}$$

Da $K^{\times m}$ Obergruppe der Normengruppe $N_{\tilde{L}/K}(\tilde{L}^\times)$ ist, ist auch $K^{\times m}$ eine Normengruppe. $\blacksquare$

<u>Satz:</u> Sei $I \leq K^\times$. FASÄ:

i) $I$ ist Normengruppe ii) $I$ offen von endl. Index

iii) $I$ abgeschlossen von endl. Index iv) $[K^\times : I] < \infty$

<u>Beweis:</u> (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ist der vorige Satz

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) war eine Übungsaufgabe

(ii) $\Rightarrow$ (iv) ✓

(iv) $\Rightarrow$ (ii) $[K^\times : I] = m \Rightarrow K^{\times m} \subseteq I$

$\Rightarrow$ mit $a \in I$ ist auch $\underbrace{aK^{\times m}}_{\text{offen}} \subseteq I$ $\blacksquare$

<u>Satz:</u> Die Normengruppen sind genau die Obergruppen von
$$\langle \pi_K^f \rangle \times U_K^{(n)} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad f = 1, 2, \ldots$$

<u>Beweis:</u>
$$\left[ K^\times : \langle \pi_K^f \rangle \times U_K^{(n)} \right] = \begin{cases} f \cdot (q_K - 1)\, q_K^{n-1} \,, & n > 0 \\ f\,(q_K - 1) \,, & n = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ also ist auch jede Obergruppe von endlichem Index und damit Normengruppe.

Sei umgekehrt $I$ Normengruppe $\Rightarrow [K^\times : I] < \infty$

$\Rightarrow I \leq K^\times$ ist offen $\Rightarrow \exists n$ mit $U_K^{(n)} \subseteq I$

$[K^\times : I] =: f \quad \Rightarrow \quad \pi_K^f \in I$

Insgesamt: $\langle \pi_K^f \rangle \times U_K^{(n)} \leq I$ $\blacksquare$

# Lubin - Tate formale Gruppen

Literatur: Neukirch, Algebraische Zahlentheorie
Iwasawa, Local Class Field Theory

$K \mid \mathbb{Q}_p$ endlich, $\pi = \pi_K$, $q = q_K = |\bar{\kappa}|$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$

$$\xi_\pi := \left\{ f(Z) \in \mathcal{O}[[Z]] \;\middle|\; \begin{array}{l} f(Z) \equiv \pi Z \mod \deg 2 \\ f(Z) \equiv Z^q \mod \pi\mathcal{O} \end{array} \right\}$$

Bspl: 1) $f(Z) = \pi Z + Z^q \in \xi_\pi$

2) $K = \mathbb{Q}_p$, $\pi = p$, $\underset{\xi_p}{\underset{\cap}{f(Z)}} = (Z+1)^p - 1$

Konvention: $f^{(n)}(Z) =$ n-maliges Einsetzen
$= f(f(\dots f(Z)))$
$f^{(0)}(Z) = Z$

Sei $\Omega = K^c$.

Def.: $\Lambda_{f,n} := \{ \omega \in \Omega \mid f^{(n)}(\omega) = 0 \}$
$L_{f,n} := K(\Lambda_{f,n})$

Es gilt: $|\Lambda_{f,n}| < \infty$, $[L_{f,n} : K] < \infty$

<u>Im 2. Beispiel:</u> $\quad f^{(n)}(Z) = (X+1)^{p^n} - 1$

$$\Rightarrow \Lambda_{f,n} = \{ \zeta_{p^n}^k - 1 \mid k = 0, \dots, p^n - 1 \}$$

$$\Rightarrow L_{f,n} = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$$

Man zeigt leicht: $\quad \Lambda_{f,n-1} \subseteq \Lambda_{f,n}$

$$\Rightarrow K \subseteq L_{f,n-1} \subseteq L_{f,n} \subseteq \dots \quad L_f = K(\Lambda_f)$$

$$= \bigcup_n L_{f,n}$$

$$\Lambda_f = \bigcup_n \Lambda_{f,n}$$

Zu $f \in \mathcal{F}_\pi$ gibt es eine <u>eindeutig</u> bestimmte Potenzreihe $F_f(X,Y) \in \mathcal{O}[[X,Y]]$ mit

$$F_f(X,Y) \equiv X + Y \mod \deg 2$$

$$f(F_f(X,Y)) = F_f(f(X), f(Y))$$

Zu $f \in \mathcal{F}_\pi$ und $a \in \mathcal{O}$ gibt es eine <u>eindeutig</u> bestimmte Potenzreihe $[a]_f(X) \in \mathcal{O}[[X]]$ mit

$$[a]_f(X) \equiv aX \mod \deg 2$$

$$f([a]_f(X)) = [a]_f(f(X))$$

Satz:

a) $F_f(X,Y)$ ist eine formale komm. Gruppe, d.h.

$$F_f(X,Y) = F_f(Y,X)$$

$$F_f(F_f(X,Y), Z) = F_f(X, F_f(Y,Z))$$

b) $[a]_f(X)$ ist ein Endomorphismus von $F_f(X,Y)$,

d.h. $$[a]_f(F_f(X,Y)) = F_f([a]_f(X), [a]_f(Y))$$

c) Ferner gilt: $[\pi^n]_f(X) = f^{(n)}(X), \ \forall n \geq 0.$

Satz: Ist $f \in \xi_\pi$, so ist $\mathfrak{p}_\Omega := \{\alpha \in \Omega \mid v_K(\alpha) > 0\}$ ein $\mathcal{O}$-Modul, d.h.

$$x \underset{F_f}{+} y := F_f(x,y), \quad a \underset{F_f}{\cdot} x := [a]_f(x)$$

Die Nullstellenmengen $\Lambda_{f,n} \subseteq \mathfrak{p}_\Omega$ ist der Untermodul der $f^{(n)}(X) = [\pi^n]_f(X) = \pi^n \underset{F_f}{\cdot}$ Torsionspunkte von $\mathfrak{p}_\Omega$.

Es gilt: $\Lambda_{f,n} \cong \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$

$$[a]_f(\omega_n) \longleftarrow a + \pi^n\mathcal{O}, \quad \omega_n \text{ ist prim. } \pi^n\text{-Torsionspunkt.}$$

Da $L_{f,n}$ hängt nur von $\pi$ ab, nicht von $f \in \mathcal{F}_\pi$, ab. Man schreibt daher:

$$L_{\pi,n}$$

<u>Bemerkung:</u> $L_{\pi,n}$ sind die Analoga für $K \supsetneq \mathbb{Q}_p$ der $p^n$-ten Kreisteilungskp. $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$.

## Klassenkörpertheoretische Beschreibung

$$\begin{array}{c} L_{\pi,n} = K(\omega_n) \\ \Big| \\ K \end{array}$$

abelsch, $\mathrm{Gal}(L_{\pi,n}/K) \cong \left(\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}\right)^\times$

$$\left(\omega_n \mapsto [a]_f(\omega_n)\right) \longleftarrow \bar{a}$$

voll verzweigt

Zugehörige Normengruppe:

$$\langle \pi \rangle \times U_K^{(n)}$$

<u>Satz:</u> Sei $a = u\pi^n \in K^\times$, $u \in U_K$. Dann ist

$$(a, L_{\pi,n}/K)(\omega) = [u^{-1}]_f(\omega), \quad \forall\, \omega \in \Lambda_{f,n}.$$

Erinnerung: Die Normengruppen der unverzweigten Erweiterungen sind genau die

$$\langle \pi^f \rangle \times U_K$$

Satz: Die Normengruppen der voll verzweigten abelschen Erweiterungen sind genau die Obergruppen von $\langle \pi \rangle \times U_K^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ .

$$\begin{array}{c} L_{\pi,n} \\ | \\ \phantom{L} \end{array}$$

"lokaler Satz von Kronecker-Weber"

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ K \end{array} \Bigg) \text{ ab., voll verzweigt}$$

$$\begin{tikzcd}
\bigcup_n L_{\pi,n} = L_\pi \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L_\pi K^{ur} \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash] & K^{ur}
\end{tikzcd}$$

$L_\pi K^{ur}$ = max. ab. Erweiterung von $K$.

max. ab. voll verzweigte Erweiterung von $K$