Vorlesung 24

15.7.2020

Wiederholung

$$\begin{array}{l} K_0^c \\ \mid \\ L \\ \mid \\ K \\ \mid \\ K_0 \end{array} \qquad L \mid K \text{ normal}$$

SATZ: $(G_{K_0}, K_0^{c\times})$ ist Klassenformation

Grundlegender Satz

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & N = LL' \\ L \arrow[ur, dash] & \\ & L' \arrow[uu, dash] \\ L \cap L' = E \arrow[uu, dash] \arrow[ur, dash] & \\ K \arrow[u, dash] & \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{l} [L:K] = [L':K] \\ L'/K \text{ unverzweigt} \end{array}\right\}$$

Bem: $N|L$ ist unverzweigt $\Rightarrow H^2(L|K) = H^2(L'|K)$ in $H^2(N|K) \subseteq H^2(K) =: Br(K)$

Def.:

$$\begin{aligned} inv_{L|K} : H^2(L/K) &\longrightarrow \tfrac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ c &\longmapsto inv_{L'/K}(c) \end{aligned}$$

Folgendes Lemma ist offen:

Sei $c \in H^2(L'/K) \subseteq H^2(N|K)$. Dann

$$inv_{N|L}(Res_L(c)) = [L:K]\, inv_{L'|K}(c)$$

(Letztes Mal allgemeiner: jetzt $M = N$)

Beweis des Lemmas: Es gilt

$$\mathrm{Res}^{G_{N|K}}_{G_{N|L}} \circ \mathrm{Inf}^{G_{N|K}}_{G_{L'|K}} = \mathrm{Res}^{G_{L'|K}}_{G_{L'|E}} \qquad (*)$$

Notation: $e = e(L|K)$, $f = f(L|K)$. Also: $ef = [L:K]$.

Es ist die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
H^2(L'/K) \arrow[r, "\overline{v}_{L'}"] \arrow[d, "\subseteq"] & H^2(G_{L'|K}, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{Inf}"] & H^1(G_{L'|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{Inf}"] & \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[d, "\subseteq"] \\
H^2(N|K) \arrow[r, phantom, "///"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_L"] & H^2(G_{N|K}, \mathbb{Z}) \arrow[r, phantom, "///"] \arrow[d, "e\,\mathrm{Res}_L"] & H^1(G_{N|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d, "e\,\mathrm{Res}_L"] & \frac{1}{[N:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[d, "{[L:K]}"] \\
H^2(N|L) \arrow[r, "\overline{v}_N"] & H^2(G_{N|L}, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^{-1}"] & H^1(G_{N|L}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi"] & \frac{1}{[N:L]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

zeigen. Das linke Teildiagramm komm., weil:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \left(G^2_{L'|K} \ni \sigma \longmapsto \underbrace{v_{L'}(c(\sigma))}_{\in L'^\times}\right) \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{Inf}^{G_{N|K}}_{G_{L'|K}}(c) \arrow[d, mapsto, "e v_K = v_L"'] & \left(G^2_{N|K} \ni \tau \longmapsto v_{L'}(c(\overline{\tau}))\right) \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{Res}^{G_{N|K}}_{G_{N|L}} \mathrm{Inf}^{G_{N|K}}_{G_{L'|K}}(c) \arrow[d, phantom, "\overset{(*)}{\|}"] & \left(G^2_{N|L} \ni \tau \longmapsto e\, v_{L'}(c(\overline{\tau}))\right) \arrow[d, phantom, "\|"] \\
\mathrm{Res}^{G_{L'|K}}_{G_{L'/E}}(c) \arrow[r, mapsto] & \left(G^2_{N|L} \ni \tau \longmapsto v_N(c(\tau))\right)
\end{tikzcd}$$

Beachte: $v_K = v_{L'}$, $v_L = v_N$

Zum rechten Teildiagramm: Es gilt

$$(**) \quad \varphi_{N|L}\big|_{L'} = \varphi_{L'|K}^{[E:K]} = \varphi_{L'|K}^{f}, \quad \text{denn:}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & N \\
L \arrow[urr, dash] & & \\
 & & L' \arrow[uu, dash] \\
E \arrow[uu, dash] \arrow[urr, dash] & & \\
K \arrow[u, dash] & &
\end{tikzcd}$$

$$\varphi_{N|L}(a) \equiv a^{q_L} \ (\mathrm{mod}(\mathfrak{p}_N \cap L')) \qquad a \in L'$$

$$= a^{q_K^f} \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}_{L'})$$

$$= \varphi_{L'|K}^{f}(a)$$

$e = e(L|K) = e(N|K) = e(N|L')$
$\Rightarrow$ $v_N = e v_{L'}$.

$$\varphi_{L'|K}(a) \equiv a^{q_{L'}} \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}_{L'}) \Rightarrow \varphi_{L'|K}^2(a) \equiv \varphi_{L'|K}(a)^{q_{L'}} = a^{q_{L'}^2}$$

$$\begin{tikzcd}
\chi \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \chi(\varphi_{L'|K}) \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{Inf}_{G_{L'|K}}^{G_{N|K}} \chi \arrow[d, mapsto] & \chi(\varphi_{L'|K}) \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{Res}_{G_{N|L}}^{G_{N|K}} \mathrm{Inf}_{G_{L'|K}}^{G_{N|K}} \chi \arrow[r, mapsto] & {[L:K]\,\chi(\varphi_{L'|K})}
\end{tikzcd}$$

$$e\,\chi(\varphi_{N|L}) \overset{(**)}{=} \underbrace{fe}_{=[L:K]}\, \chi(\varphi_{L'|K})$$

Siehe jetzt [Neu, S. 102/103] oder unser Überblick.

<u>Satz:</u> Sei $L|K$ eine abelsche Erweiterung p-adischer Zahlkp. Sei

$$G_0 = \{ \sigma \in \mathrm{Gal}(L|K) \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}_L} \}$$

und

$$G_1 = \{ \sigma \in \mathrm{Gal}(L|K) \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}_L^2} \}$$

(Allgemein: $G_i := \{ \sigma \in \mathrm{Gal}(L|K) \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}_L^{i+1}},\ \forall \alpha \in \mathcal{O}_L \}$)

Dann gilt:

(i) $(-, L|K) : U_K \twoheadrightarrow G_0$

(ii) $(-, L|K) : U_K^{(1)} \twoheadrightarrow G_1$

<u>Beweis:</u> Zu (i):

$$\begin{array}{l} L \quad |G_0| = e \\ \big| \; e \text{ vollverzweigt} \\ T = L^{G_0} \\ \big| \; f\text{, unverzweigt} \\ K \end{array}$$

Sei $u \in U_K$. Dann gilt:

$$(u, L|K)\big|_T = (u, T|K) = \varphi_{T|K}^{v_K(u)} = 1$$

$$\Rightarrow (u, L|K) \in \mathrm{Gal}(L|T) = G_0$$

Sei umgekehrt $\tau \in G_0$. Sei $a \in K^\times$, so daß

$$(a, L|K) = \tau$$

(a ist modulo $N_{L|K}(L^\times)$ eindeutig).

<u>ZIEL:</u> Finde $u \in \mathcal{U}_K$ mit $(u, L|K) = (a, L|K)$

$$\Updownarrow$$

$$a = u\, N_{L|K}(b),\ b \in L^\times$$

<u>Dazu:</u> $\tau \in G_0 \Rightarrow \tau\big|_T = \underline{\underline{1}}$

$$\tau\big|_T = (a, L|K)\big|_T = (a, T|K) = \underline{\underline{\varphi_{T|K}^{v_K(a)}}}$$

$\Rightarrow f = \operatorname{ord}(\varphi_{T|K})$ teilt $v_K(a)$

Für $b \in L^\times$ mit $v_L(b) = \frac{1}{f} v_K(a) \in \mathbb{Z}$ folgt:

$$\underline{\underline{v_K(N_{L|K}(b))}} = v_K\left(N_{L|K}\left(\pi_L^{v_L(b)}\right)\right)$$

$b = \pi_L^{v_L(b)} \cdot u_1$

$u_1 \in \mathcal{U}_L$

$$= v_L(b)\, v_K(N_{L|K}(\pi_L))$$

$$= v_L(b)\, v_K(\pi_K^f) = v_L(b) f$$

$N_{L|K}(\mathfrak{p}_L) = \mathfrak{p}_K^f$

$= \underline{\underline{v_K(a)}}$ nach Wahl von b.

$\Longrightarrow \exists\, u \in \mathcal{U}_K : a = N_{L|K}(b)\, u$

Zu ii) G_1 ist die p-Sylowuntergruppe von G_0,

denn: $G_0/G_1 \hookrightarrow \overline{K}^\times$, $G_i/G_{i+1} \hookrightarrow U_K^{(i)}/U_K^{(i+1)} \cong \overline{K}$

$\Rightarrow (|G_0/G_1|, p) = 1$

$\Rightarrow |G_i/G_{i+1}| = p$-Potenz

Für $n \gg 0$ ist $U_K^{(n)} \subseteq \ker(-, L|K)$, denn:

für n' ist $U_K^{(n')} \xrightarrow[\simeq]{-^m} U_K^{(n'+v_K(m))}$; nimm also

z. B. $n = n' + v_K(m)$ für $m = [L:K]$. Dann

gilt: $\alpha \in U_K^{(n)} \Rightarrow \alpha = \beta^m$, $\beta \in U_K^{(n')}$

$\Rightarrow (\alpha, L|K) = \underbrace{(\beta, L|K)}_{\in Gal(L|K)}^m = 1$)

Nach (i) gilt: $U_K/U_K^{(n)} \twoheadrightarrow G_0 \supseteq G_1 = p$-Sylow

Die p-Sylowuntergruppe von

$U_K/U_K^{(n)}$ geht surjektiv auf G_1. Es gilt

$Syl_p(U_K/U_K^{(n)}) = U_K^{(1)}/U_K^{(n)}$, denn: $U_K/U_K^{(1)} \simeq \overline{K}^\times$.

Der Existenzsatz

Jede Normengruppe $N_{L|K}(L^\times) \leq K^\times$ ist offen von endlichem Index
$L|K$ normal

<u>Denn:</u> oE L/K abelsch

$$\left| K^\times / N_{L|K}(L^\times) \right| = [L:K] =: m$$

$$\Rightarrow \quad K^{\times m} \subseteq N_{L|K}(L^\times) \subseteq K^\times$$

$K^{\times m} \leq K^\times$ ist offen von endlichem Index

$$\Rightarrow \quad N_{L|K}(L^\times) = \dot{\bigcup_{x \in N_{L|K}(L^\times)/K^{\times m}}} x K^{\times m}$$ ist offen von endlichem Index