
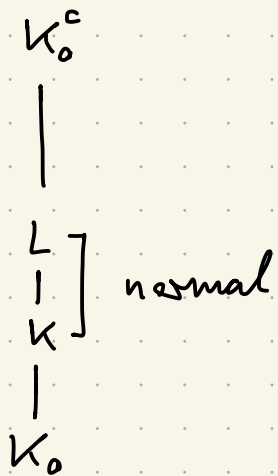


Vorlesung 24

15.7.2020



Wiederholung



SATZ: $(G_{K_0}, K_0^{c,ix})$ ist
Klassenformation

Grundlegender Satz

$$L \cap L' = E \left. \begin{array}{l} \begin{array}{c} L \\ \diagdown \\ L' \\ \diagup \\ K \end{array} \\ N = LL' \end{array} \right\} \begin{array}{l} [L:K] = [L':K] \\ L'/K \text{ unverzweigt} \end{array}$$

Bem: N/K ist
unverzweigt

$$\Rightarrow H^2(L/K) = H^2(L'/K)$$

$$\text{in } H^2(N/K) \subseteq H^2(K) =: \mathcal{B}(K)$$

Def.: $\text{inv}_{L/K} : H^2(L/K) \rightarrow \frac{1}{[L:K]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

$$c \mapsto \text{inv}_{L'/K}(c)$$

Folgendes Lemma ist offen:

Sei $c \in H^2(L'/K) \subseteq H^2(N/K)$. Dann

$$\text{inv}_{N/K}(\text{Res}_L(c)) = [L:K] \text{inv}_{L'/K}(c)$$

(Letztes Mal allgemein: jetzt $M = N$)

Beweis des Lemmas: Es gilt

$$\text{Res}_{G_{N|L}}^{G_{N|K}} \circ \text{Int}_{G_{L|K}}^{G_{N|K}} = \text{Res}_{G_{L|E}}^{G_{L|K}} \quad (*)$$

Notation: $e = e(L|K)$, $f = f(L|K)$. Also: $ef = [L:K]$.

Es ist die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^2(L'/K) & \xrightarrow{\bar{v}_{L'}} & H^2(G_{L'|K}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta^{-1}} & H^1(G_{L'|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi} & \frac{1}{[L:K]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \text{Int} & & \downarrow \text{Int} & & \downarrow \cong \\
 H^2(N|K) & \cong & H^2(G_{N|K}, \mathbb{Z}) & \cong & H^1(G_{N|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & & \frac{1}{[N:K]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \\
 \downarrow \text{Res}_L & & \downarrow e \text{Res}_L & & \downarrow e \text{Res}_L & & \downarrow [L:K] \\
 H^2(N|L) & \xrightarrow{\bar{v}_N} & H^2(G_{N|L}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta^{-1}} & H^1(G_{N|L}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi} & \frac{1}{[N:L]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}
 \end{array}$$

Zeigen. Das linke Teildiagramm kommut., weil:

$$\begin{array}{ccc}
 c & \longmapsto & (G_{L'|K}^2 \ni \bar{\sigma} \longmapsto v_{L'}(c(\bar{\sigma})) \in L'^{\times}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Int}_{G_{L|K}}^{G_{N|K}}(c) & & (G_{N|K}^2 \ni \bar{\tau} \longmapsto v_{L'}(c(\bar{\tau}))) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Res}_{G_{N|L}}^{G_{N|K}} \text{Int}_{G_{L|K}}^{G_{N|K}}(c) & & (G_{N|L}^2 \ni \tau \longmapsto e v_{L'}(c(\bar{\tau}))) \\
 \downarrow (*) & & \downarrow \\
 \text{Res}_{G_{L|E}}^{G_{L|K}}(c) & \longmapsto & (G_{N|L}^2 \ni \tau \longmapsto v_N(c(\tau)))
 \end{array}$$

ev_K = v_L

Beachte: $v_K = v_{L'}$, $v_L = v_N$

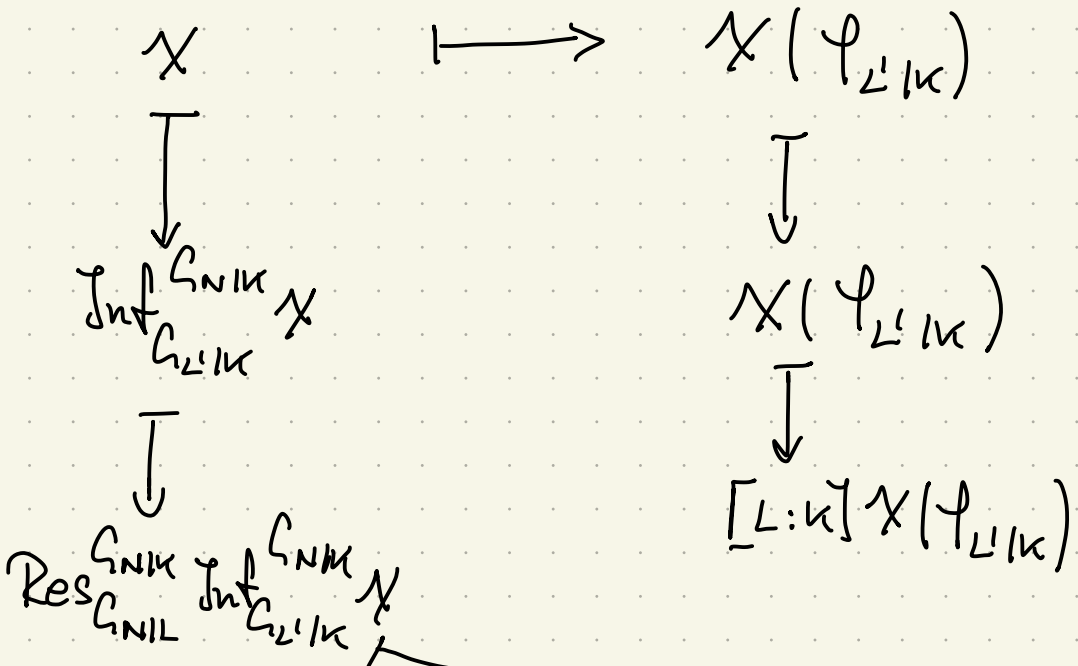
Zum rechten Teildiagramm: Es gilt

(**) $\varphi_{N|L} \Big|_{L'} = \varphi_{L'|K}^{[E:K]} = \varphi_{L'|K}^f$, denn:

$\varphi_{N|L}(a) \equiv a^{g_L} \pmod{\mathfrak{f}_N \cap L'}$ $a \in L'$
 $= a^{g_K^f} \pmod{\mathfrak{f}_{L'}}$

$e = e(L/K) = e(N/K) = e(N/L')$
 $\Rightarrow v_N = e v_{L'}$

$\varphi_{L'|K}(a) \equiv a^{g_{L'}} \pmod{\mathfrak{f}_{L'}} \Rightarrow \varphi_{L'|K}^z(a)$
 $\equiv \varphi_{L'|K}(a)^{g_{L'}}$
 $= a^{g_{L'}^2}$



$e X(\varphi_{N|L}) \stackrel{(**)}{=} \underbrace{f e}_{= [L:K]} X(\varphi_{L'|K})$

Siehe jetzt [Neu, S. 102/103] oder auch
Übblid.

Satz: Sei $L|K$ eine abelsche Erweiterung p -adischer
Zahlkörper. Sei

$$G_0 = \left\{ \sigma \in \text{Gal}(L|K) \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{f}_L} \right\}$$

und

$$G_1 = \left\{ \sigma \in \text{Gal}(L|K) \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{f}_L^2} \right\}$$

(Allgemein: $G_i := \left\{ \sigma \in \text{Gal}(L|K) \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{f}_L^{i+1}}, \forall \alpha \in \mathcal{O}_L \right\}$)

Dann gilt:

$$(i) \quad (-, L|K) : \mathcal{U}_K \longrightarrow G_0$$

$$(ii) \quad (-, L|K) : \mathcal{U}_K^{(n)} \longrightarrow G_1$$

Beweis: Zu (i):

L $|$ K $|$ e
 $|$ e vollverzweigt

$$\Gamma = L^{G_0}$$

$|$ \mathfrak{f} , unverzweigt

K

Sei $u \in \mathcal{U}_K$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (u, L|K) \Big|_{\Gamma} &= (u, \Gamma|K) \\ &= \varphi_{\Gamma|K}^{v_K(u)} = 1 \end{aligned}$$

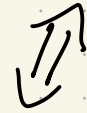
$$\Rightarrow (u, L|K) \in \text{Gal}(L|\Gamma) = G_0$$

Sei umgekehrt $\tau \in G_0$. Sei $a \in K^\times$, so dass

$$(a, L/K) = \tau$$

(a ist modulo $N_{L/K}(L^\times)$ eindeutig).

ZIEL: Finde $u \in U_K$ mit $(u, L/K) = (a, L/K)$



$$a = u N_{L/K}(b), b \in L^\times$$

Dazu: $\tau \in G_0 \Rightarrow \tau|_T = \underline{\underline{1}}$

$$(a, L/K)|_T = (a, T/K) = \underline{\underline{f}}_{T/K}^{v_K(a)}$$

$$\Rightarrow f = \text{ord}(f_{T/K}) \text{ teilt } v_K(a)$$

Für $b \in L^\times$ mit $v_L(b) = \frac{1}{f} v_K(a) \in \mathbb{Z}$ folgt:

$$\underline{\underline{v_K(N_{L/K}(b))}} = v_K(N_{L/K}(\pi_L^{v_L(b)}))$$

$$b = \pi_L^{v_L(b)} \cdot u_1$$

$$u_1 \in U_L$$

$$= v_L(b) v_K(N_{L/K}(\pi_L))$$

$$= v_L(b) v_K(\pi_K^f) = v_L(b) f$$

$$N_{L/K}(f_L) = f_K^f$$

$$= \underline{\underline{v_K(a)}} \text{ nach Wahl von } b.$$

$$\Rightarrow \exists u \in U_K : a = N_{L/K}(b) u$$

Zu ii) G_n ist die p -Sylowuntergruppe von G_0 ,

denn: $G_0/G_n \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}}^\times$, $G_i/G_{i+1} \hookrightarrow U_{\mathbb{K}}^{(i)}/U_{\mathbb{K}}^{(i+1)}$

$$\Rightarrow (|G_0/G_n|, p) = 1$$

IS
 $\overline{\mathbb{K}}$

$$\Rightarrow |G_i/G_{i+1}| = p\text{-Potenz}$$

Für $n \gg 0$ ist $U_{\mathbb{K}}^{(n)} \subseteq \ker(-, L/\mathbb{K})$, denn:

für n' ist $U_{\mathbb{K}}^{(n')} \xrightarrow[\cong]{m} U_{\mathbb{K}}^{(n'+v_{\mathbb{K}}(m))}$; nimm also

z. B. $n = n' + v_{\mathbb{K}}(m)$ für $m = \lfloor L/\mathbb{K} \rfloor$. Dann

gilt: $\alpha \in U_{\mathbb{K}}^{(n)} \Rightarrow \alpha = \beta^m, \beta \in U_{\mathbb{K}}^{(n')}$

$$\Rightarrow (\alpha, L/\mathbb{K}) = \underbrace{(\beta, L/\mathbb{K})^m}_{\in \text{Gal}(L/\mathbb{K})} = 1$$

Nach (i) gilt: $U_{\mathbb{K}}/U_{\mathbb{K}}^{(n)} \twoheadrightarrow G_0$

U

$G_n = p$ -Sylow

Die p -Sylowuntergruppe von

$U_{\mathbb{K}}/U_{\mathbb{K}}^{(n)}$ geht surjektiv auf G_n . Es gilt

$$\text{Syl}_p(U_{\mathbb{K}}/U_{\mathbb{K}}^{(n)}) = U_{\mathbb{K}}^{(1)}/U_{\mathbb{K}}^{(n)}, \text{ denn: } U_{\mathbb{K}}/U_{\mathbb{K}}^{(n)} \cong \overline{\mathbb{K}}^\times.$$



Der Existenzsatz

Jede Normengruppe $N_{L/K}(L^\times) \subseteq K^\times$ ist offen von endlichem Index
 L/K normal

Denn: $0 \in L/K$ abelsch

$$\left| \frac{K^\times}{N_{L/K}(L^\times)} \right| = [L:K] =: m$$

$$\Rightarrow K^{xm} \subseteq N_{L/K}(L^\times) \subseteq K^\times$$

$K^{xm} \subseteq K^\times$ ist offen von endlichem Index

$$\Rightarrow N_{L/K}(L^\times) = \bigcup_{x \in N_{L/K}(L^\times) / K^{xm}} x K^{xm} \quad \text{ist offen von endlichem Index}$$