Vorlesung 23

13.7.2020

Wiederholung

$$\begin{array}{c} K_0^{ur} = T \\ | \\ L \\ | \\ K \\ | \\ K_0 \\ | \\ \mathbb{Q}_p \end{array}$$

<u>Satz:</u> $\left(\mathrm{Gal}(K_0^{ur}/K_0), T^\times\right)$ ist Klassenformation

$$\begin{tikzcd}
H^2(L|K, L^\times) \arrow[r, "\mathrm{inv}_{L|K}"] \arrow[d, "\bar{v}_L"] & \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} & \chi(\varphi_{L|K}) \\
H^2(L|K, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^{-1}"] & H^1(\mathrm{Gal}(L|K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[u, "\varphi"] & \chi \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$$H^1(\mathrm{Gal}(L|K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(L|K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

<u>ZIEL:</u> $\left(G_{K_0}, K_0^{c,\times}\right)$ ist Klassenformation

Ab jetzt:

$$\begin{array}{c} K_0^{c} \\ | \\ L \\ | \\ K \\ | \\ K_0 \\ | \\ \mathbb{Q}_p \end{array}$$

<u>2. fundamentale Ungleichung:</u>

$$\# H^2(L|K) \quad \text{teilt} \quad [L:K]$$

wobei $H^2(L|K) := H^2(\mathrm{Gal}(L|K), L^\times)$

<u>Beh:</u> Sei $[L:K] = p$. Dann: $\underset{\#H^2(L|K)}{\underset{\|}{h(L^\times)}} \overset{!}{=} p$

<u>Bew:</u>

$$h(L^\times) = \frac{q_{0,p}(K^\times)^p}{q_{0,p}(L^\times)}$$

Ü7, A5

$$q_{0,p}(K^\times) = \frac{(K^\times : K^{\times p})}{|\mu_p(K)|}, \quad q_{0,p}(L^\times) = \frac{(L^\times : L^{\times p})}{|\mu_p(L)|}.$$

<u>Satz:</u> $$(K^\times : K^{\times m}) = m\, q_K^{v_K(m)}\, |\mu_m(K)|$$

Beweis im Anschluß.

<u>Beachte:</u> $q_L = q_K^f$, $\quad v_L(p) = e\, v_K(p)$

$$\left.\begin{array}{c} L \\ | \\ K \end{array}\right)\, ef$$

Rest Einsetzen.

<u>Zum allgemeinen Fall:</u>

$\mathrm{Gal}(L|K)$ ist auflösbar, siehe ZTh I, Satz 8.3.7

Also gibt es

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ | \\ K' \\ | \\ K \end{array} \quad \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right] \, p\text{, zyklisch}$$

HS 90

Wegen $H^1(K'|K) = 1$ ist

$$0 \to H^2(K'|K) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^2(L|K) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^2(L|K')$$

ist exakt. $\Rightarrow$ $\# H^2(L|K)$ teilt $\underbrace{\# H^2(K'|K)}_{= p} \cdot \# H^2(L|K')$

Mit vollständiger Induktion nach $[L:K]$ erhält man
$$\# H^2(L/K') \;\Big|\; [L:K']$$

Also insgesamt: $\# H^2(L/K)$ teilt $\underbrace{[K':K][L:K']}_{= [L:K]}$ $\blacksquare$

Beweis von $(K^\times : K^{\times m}) = m\, q_K^{v_K(m)}\, |\mu_m(K)|$.

Es gilt:
$$q_{0,m}(K^\times) = \frac{(K^\times : K^{\times m})}{|\mu_m(K)|}$$

$$\Rightarrow \quad (K^\times : K^{\times m}) = q_{0,m}(K^\times)\, |\mu_m(K)|$$

Also zu zeigen: $q_{0,m}(K^\times) = m\, q_K^{v_K(m)}$

Aus
$$0 \longrightarrow \mathcal{U}_K \longrightarrow K^\times \xrightarrow{v_K} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$
folgt mit Ü7, A3
$$q_{0,m}(K^\times) = q_{0,m}(\mathcal{U}_K) \cdot \underbrace{q_{0,m}(\mathbb{Z})}_{= m}$$

Also ist zu zeigen:
$$q_{0,m}(\mathcal{U}_K) = q_K^{v_K(m)}$$

Sei $n \gg 0$. Dann

$$U_K^{(n)} \xrightarrow[\sim]{-^{m}} U_K^{(n+v_K(m))}$$

Betrachte

$$0 \to U_K^{(n)} \to U_K \to U_K / U_K^{(n)} \to 0$$

$$\Rightarrow \quad q_{0,m}(U_K) = q_{0,m}\left(U_K^{(n)}\right) \cdot \underbrace{q_{0,m}\left(U_K / U_K^{(n)}\right)}_{=1}$$

und

$$q_{0,m}\left(U_K^{(n)}\right) = \frac{\left(U_K^{(n)} : U_K^{(n+v_K(m))}\right)}{\left|\mu_m(K) \cap U_K^{(n)}\right|} \qquad U_K^{(n)} \xrightarrow[\cong]{\log} \mathfrak{p}_K^n$$

$$= \left(U_K^{(n)} : U_K^{(n+v_K(m))}\right)$$

$$= \left(\mathfrak{p}_K^n : \mathfrak{p}_K^{n+v_K(m)}\right)$$

$$= \left(\mathcal{O}_K : \mathfrak{p}_K^{v_K(m)}\right) = q_K^{v_K(m)} \quad \blacksquare$$

<u>Lemma:</u> Seien $f, g : A \to A$ mit $f \circ g = g \circ f = 0$. Sei $|A| < \infty$. Dann $q_{f,g}(A) = 1$.

Bew: $$q_{f,g}(A) = \frac{(\ker(f) : \operatorname{im}(g))}{(\ker(g) : \operatorname{im}(f))}$$

Betrachte

$$0 \to \ker(f) \longrightarrow A \xrightarrow{f} \operatorname{im}(f) \to 0$$

$$0 \to \ker(g) \longrightarrow A \xrightarrow{g} \operatorname{im}(g) \to 0$$

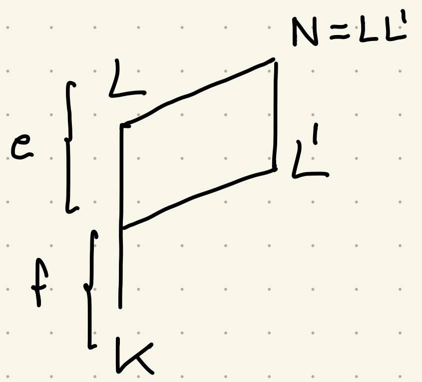
$$\Rightarrow \quad |A| = |\ker(f)|\,|\operatorname{im}(f)| = |\ker(g)|\,|\operatorname{im}(g)|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|\ker(f)|}{|\operatorname{im}(g)|} = \frac{|\ker(g)|}{|\operatorname{im}(f)|}$$

$\blacksquare$

unverzweigte

Satz: Sei $L|K$ normal und sei $L'|K$ die Erweiterung vom Grad $[L:K]$. Dann ist



$$H^2(L|K) = H^2(L'|K)$$

in $H^2(N|K) \subseteq H^2(K)$

$$\left(\text{d.h. } \operatorname{inf}_{G_{L|K}}^{G_{N|K}} H^2(L|K) = \operatorname{inf}_{G_{L'|K}}^{G_{N|K}} H^2(L'|K)\right)$$

Beweis: Es genügt zu zeigen: $H^2(L'|K) \subseteq H^2(L|K)$

denn: $$\left.\begin{array}{l} |H^2(L'|K)| = [L':K] = [L:K] \\ |H^2(L|K)| \text{ teilt } [L:K] \end{array}\right\} \Rightarrow$$ die Inklusion impliziert also Gleichheit.

Sei $c \in H^2(L'|K)$. Aus

$$0 \to H^2(L|K) \xrightarrow{\mathrm{Inf}_N} \overset{\overset{c}{\cap}}{H^2(N|K)} \xrightarrow{\mathrm{Res}_L} H^2(N|L)$$

folgt $\quad c \in H^2(L|K) \iff \mathrm{Res}_L(c) = 1 \quad$ in $H^2(N|L)$

$$\iff \mathrm{inv}_{N|L}(\mathrm{Res}_L(c)) = 0$$

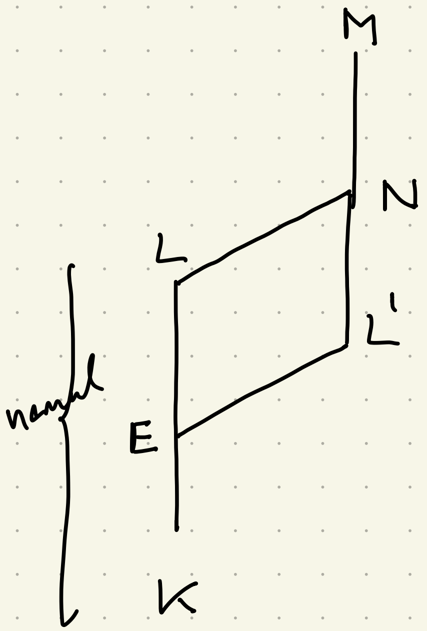
in $\frac{1}{[N:L]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$

Also reicht es zu zeigen:

$$\mathrm{inv}_{N|L}(\mathrm{Res}_L(c)) = [L:K] \underbrace{\mathrm{inv}_{L'|K}(c)}_{\in \frac{1}{[L':K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} \qquad (*)$$

Da notieren wir

<u>Lemma</u>: Sei $M|K$ normal und $L'|K$ unverzweigt, $L|K$ normal, $L, L' \subseteq M$.



Dann ist $N|L$ unverzweigt.

Sei $c \in H^2(L'|K) \subseteq H^2(M|K)$

Dann ist $\mathrm{Res}_L(c) \in H^2(N|L)$

und es gilt

$$\mathrm{inv}_{N|L}(\mathrm{Res}_L(c)) = [L:K]\, \mathrm{inv}_{L'|K}\, c.$$

Beweis: später

Das Lemma impliziert $(*)$

Definition: Sei $L|K$ normal in K_0^c/K_0 und $L'|K$ die unverzweigte Erweiterung mit
$$[L':K] = [L:K].$$
Dann sei
$$\mathrm{inv}_{L|K} : H^2(L|K) \longrightarrow \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$
definiert durch $\mathrm{inv}_{L|K}(c) := \mathrm{inv}_{L'|K}(c)$,
$$c \in H^2(L|K) = H^2(L'|K)$$
SATZ: $(G_{K_0}, K_0^{c,\times})$ ist eine Klassenformation

Beweis: Axiom I ist HS 90

Zu Axiom IIa:

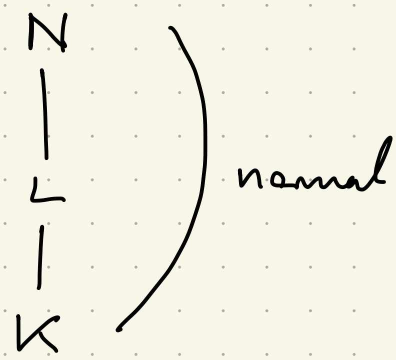
$$\left.\begin{array}{c} N \\ | \\ L \\ | \\ K \end{array}\right) \text{alles normal}$$

Seien N' und L' die unverzweigten Erweiterungen mit
$$[N':K] = [N:K], \quad [L':K] = [L:K]$$
Sei $c \in H^2(L|K)$. Dann:
$$\mathrm{inv}_{N|K}(c) = \mathrm{inv}_{N'|K}(c) = \mathrm{inv}_{L'|K}(c) = \mathrm{inv}_{L|K}(c)$$
Das ist Axiom IIa.

__Zum Axiom IIb:__ Axiom IIa $\Longrightarrow$ wir haben eine wohldefiniert injektive Abbildung

$$Br(K) = H^2(K) = \bigcup_{\substack{L|K \\ \text{normal}}} H^2(L|K) \xhookrightarrow{inv_K} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Für IIb ist nachzuweisen: sei $c \in H^2(N|K)$



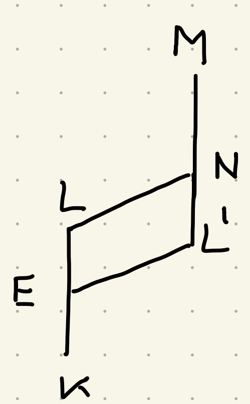
Dann gilt:

$$inv_{N|L}\big(Res_L(c)\big) = [L:K]\; inv_{N|K}(c)$$

Das ist das Lemma von vor zwei Seiten.

__Zum Beweis dieses Lemmas:__ An den 2-Kozykeln liest man ab

$$Res^{G_{M|K}}_{G_{M|L}} \; Inf^{G_{M|K}}_{G_{L'|K}} = Inf^{G_{M|L}}_{G_{N|L}} \; Res^{G_{L'|K}}_{G_{L'|E}} \qquad (*)$$



Benutze dazu:

$$Gal(N|L) \xrightarrow[res]{\sim} Gal(L'|E)$$

$$E = L' \cap L.$$

Damit ist

$$\mathrm{Res}_L(c) = \mathrm{Res}^{G_{M|K}}_{G_{M|L}} \left(\mathrm{Inf}^{G_{M|K}}_{G_{L|K}} \right) \in H^2(N|L)$$

Seien e und f die Verzweigungsindex und Restklassensp.grad von $L|K$, also

$$[L:K] = ef, \quad v_L = e v_K, \quad [\bar{L}:\bar{K}] = f.$$
$$q_L = q_K^f .$$

Es ist die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
H^2(L'/K) \arrow[r, "\bar{v}_K"] \arrow[d, "\subseteq"] & H^2(G_{L'|K}, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^{-1}"] & H^1(G_{L'|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "f"] & \frac{1}{[L':K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[d, "\subseteq"] \\
H^2(M/K) \arrow[d, "\mathrm{Res}_L"] & & & \frac{1}{[M:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[d, "{[L:K]}"] \\
H^2(N|L) \arrow[r, "\bar{v}_L"] & H^2(G_{N|L}, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^{-1}"] & H^1(G_{N|L}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "f"] & \frac{1}{[N:L]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Es ist nämlich zu zeigen:

$$\mathrm{inv}_{N|L}\left(\mathrm{Res}_L(c)\right) = [L:K] \; \mathrm{inv}_{L'|K}\, c$$

In der Übung: Wiederholung der Kummertheorie anhand von [Neu, Alg. Zth., ab S. 293]

Abstrakte Kummertheorie