Vorlesung 22

8.7.2020

Wiederholung

$$\begin{array}{l} K \\ | <\infty \\ \mathbb{Q}_p \end{array} \qquad K^\times = \langle \pi_K \rangle \times \underbrace{\mu_{q-1} \times U_K^{(1)}}_{U_K = U_K^{(0)}} \quad , \; q = |\overline{K}| = p^f$$

$$f = [\overline{K} : \mathbb{F}_p]$$

$$U_K^{(0)} \supseteq U_K^{(1)} \supseteq U_K^{(2)} \supseteq \dots$$

$U_K^{(0)} / U_K^{(1)} \simeq \overline{K}^\times$, insbesondere $p \nmid \# U_K^{(0)} / U_K^{(1)}$

$U_K^{(n)} / U_K^{(n+1)} \simeq \overline{K}$, $\quad U_K^{(n)} / U_K^{(n+1)} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^f$

<u>Lemma:</u> $U_K^{(n)} \xrightarrow[\simeq]{\;-^m\;} U_K^{(n+v_K(m))}$, $\quad n \gg 0$

Unverzweigte Erweiterungen

$$\begin{array}{ll} K_0^{ur} = T & \\ | & \\ N & \\ | & \\ L & \mathfrak{p}_L \\ | & \\ K & \mathfrak{p}_K \\ | & \\ K_0 & \\ | <\infty & \\ \mathbb{Q}_p & \end{array}$$

T max. unverzweigte Erweiterung von K_0

$$\varphi_{L|K}(\alpha) \equiv \alpha^q \pmod{\mathfrak{p}_L} \quad , \; \alpha \in \mathcal{O}_L$$

$$\varphi_{N|K}\big|_L = \varphi_{L|K}$$

$$\varphi_{N|K}^{[L:K]} = \varphi_{N|L}$$

<u>SATZ:</u> $(Gal(T/K_0), T^\times)$ ist Klassenformation

Definition von $\mathrm{inv}_{L|K} : H^2(L/K, L^\times) \xrightarrow{\simeq} \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$

$$0 \to \underbrace{U_L}_{c.t.} \longrightarrow L^\times \xrightarrow{v_L} \mathbb{Z} \to 0 \quad \text{exakt}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
H^2(L/K, L^\times) \arrow[r, "\overline{v_L}", "\simeq"'] \arrow[d, dashed, "\mathrm{inv}_{L/K}"] & H^2(L/K, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^{-1}", "\simeq"'] & H^1(L/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \\
\frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} & & \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(L/K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[ll] \\
\chi(\varphi_{L/K}) & & \chi \arrow[ll, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$$0 \to \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Q}}_{c.t} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

Beweis: Axiom I ist HS 90. Für Axiom II ist Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
H^2(L/K) \arrow[r, "\overline{v_L}"] \arrow[d, "\mathrm{Inf}"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & H^2(L/K, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{Inf}"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & H^1(L/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{Inf}"] & \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[d, "\subseteq"] \\
H^2(N/K) \arrow[r, "\overline{v_N}"] & H^2(N/K, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^{-1}"] & H^1(N/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi"] & \frac{1}{[N/K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H^2(N/K) \arrow[r, "\overline{v_N}"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & H^2(N/K, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & H^1(N/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \frac{1}{[N:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[d, "\cdot [L:K]"] \\
H^2(N/L) \arrow[r, "\overline{v_N}"] & H^2(N/L, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^{-1}"] & H^1(N/L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi"] & \frac{1}{[N:L]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Kommutativität links oben: Sei $\overline{x} \in H^2(L|K) = H^2(\mathrm{Gal}(L|K), L^\times)$

$$\begin{array}{ccc}
\overline{x} & \xmapsto{v_L} & \overline{v_L \circ x} \\
\downarrow & & \downarrow \mathrm{Inf} \\
& & \left((\overline{\sigma}, \overline{\tau}) \longmapsto v_L(x(\overline{\sigma}, \overline{\tau})) \right) \\
\mathrm{Inf}\,\overline{x} & & \Vert \quad v_N|_L = v_L \text{, da } N|L \text{ unverzweigt ist.} \\
& \longmapsto & \left((\overline{\sigma}, \overline{\tau}) \longmapsto v_N(x(\overline{\sigma}, \overline{\tau})) \right)
\end{array}$$

Kommutativität rechts oben:

$$\begin{array}{ccc}
x & \xmapsto{\varphi} & x(\varphi_{L|K}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
& & x(\varphi_{L|K}) \\
& & \Vert \quad \varphi_{N|K}\big|_L = \varphi_{L|K} \\
\mathrm{Inf}(x) & \xmapsto{\varphi} & (\mathrm{Inf}(x))(\varphi_{N|K})
\end{array}$$

Rechts unten:

$$\begin{array}{ccc}
x & \longmapsto & x(\varphi_{N|K}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Res}(x) & & [L:K]\, x(\varphi_{N|K}) \\
& & \Vert \quad \varphi_{N|K}^{[L:K]} = \varphi_{N|L} \\
& \longmapsto & (\mathrm{Res}(x))(\varphi_{N|L}) = x(\varphi_{N|L})
\end{array}$$

$\blacksquare$

Satz: $H^2(T) := \bigcup_{\substack{L|K_0 \\ \text{endl. unverzweigt}}} H^2(L|K_0, L^\times) \xhookrightarrow{inv_K} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

ist ein Isomorphismus.

Beweis: Die Surjektivität folgt aus

$$H^2(L|K_0, L^\times) \underset{inv_{L|K_0}}{\overset{\sim}{\longrightarrow}} \frac{1}{[L:K_0]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

und der Tatsache, daß es zu $n \in \mathbb{N}$ eine unverzweigte Erweiterung $K_n|K_0$ gibt

(bzw: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$) ∎

Wir haben ein Normrestsymbol $(\_, L|K)$, so daß

$$0 \to N_{L|K}(L^\times) \longrightarrow K^\times \xrightarrow{(\_, L|K)} \underset{\langle \varphi_{L|K} \rangle}{\overset{\shortparallel}{Gal(L|K)}} \longrightarrow 0$$

exakt ist.

Satz: $(a, L|K) = \varphi_{L|K}^{v_K(a)}$ für alle $a \in K^\times$.

Wir dazu das

Lemma: Sei (G, A) eine Klassenformation und $L|K$ normal. Sei $a \in A_K$ und $\bar{a} \in H^0(L|K) = A_K / N_{L|K} A_L$.
Dann gilt für $\chi \in H^1(L|K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = Hom(G_{L|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

$$\chi\big(\underbrace{(a, L|K)}_{G_{L|K}^{ab}}\big) = \mathrm{inv}_{L|K}\big(\underbrace{\bar{a}}_{H^0(G_{L|K}, A_L)} \cup \underbrace{\delta\chi}_{H^2(G_{L|K}, \mathbb{Z})}\big) \quad \text{in } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

hierbei ist δ der Verbindungshomom.

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

<u>Beweis des Satzes:</u>

$$\underline{\underline{\chi((a, L|K))}} \overset{\text{Lemma}}{=} \mathrm{inv}_{L|K}(\bar{a} \cup \delta\chi)$$

$$= (\varphi \circ \delta^{-1} \circ \bar{v}_L)(\bar{a} \cup \delta\chi)$$

$$\overset{(*)}{=} (\varphi \circ \delta^{-1})(v_L(a)\,\delta\chi)$$

$$= \varphi(v_L(a)\chi) = \varphi(v_K(a)\chi) = v_K(a)\varphi(\chi)$$

$$= v_K(a)\,\chi(\varphi_{L|K})$$

Da dies für alle χ gilt, $\quad = \underline{\underline{\chi(\varphi_{L|K}^{v_K(a)})}}$

ist $(a, L|K) = \varphi_{L|K}^{v_K(a)}$

Zu $(*)$: Es gilt allgemein für $q \geq 1$

$$H^0(G, A) \times H^q(G, B) \xrightarrow{\cup} H^q(G, A \otimes B)$$

$$(\bar{a}_0, \bar{b}_q) \longmapsto \bar{a}_0 \cup \bar{b}_q = \overline{a_0 \otimes b_q}$$

wobei $a_0 \otimes b_q : G^q \longrightarrow A \otimes B, \; (\sigma_1, \dots, \sigma_q) \mapsto a_0 \otimes b_q(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$

Beweis des Lemmas: Setze $\sigma_a = (a, L|K) \in G^{ab}_{L|K}$.

Sei $G^{ab}_{L|K} \xrightarrow{\sim} H^{-2}(G_{L|K}, \mathbb{Z})$

$\sigma_a \longmapsto \overline{\sigma_a}$

Betrachte

$$\begin{tikzcd}
\overline{\sigma_a} & H^{-2}(G_{L|K},\mathbb{Z}) \arrow[rr, "u_{L|K}\cup -", "\sim"'] & & H^0(L|K) & \overline{a} \\
 & G^{ab}_{L|K} \arrow[u, equal] & & A_K \arrow[ll, "(-{,}L|K)"'] \arrow[u] & \\
\sigma_a \arrow[uu, mapsto] & & & & a \arrow[llll, mapsto] \arrow[uu, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$$\overline{a} = u_{L|K} \cup \overline{\sigma_a}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\overline{a} \cup \delta\chi &= (u_{L|K} \cup \overline{\sigma_a}) \cup \delta\chi \\
&= u_{L|K} \cup (\overline{\sigma_a} \cup \delta\chi) \\
&= u_{L|K} \cup \delta(\overline{\sigma_a} \cup \chi)
\end{aligned}$$

für $A = \mathbb{Z}$.

Benutze die Rechenregel [Neu, I, (5.7)] oder [Studey, Lemma 2.71] $\Rightarrow$

$$\underbrace{\overline{\sigma_a}}_{\in H^{-2}(G_{L|K},\mathbb{Z})} \cup \underbrace{\chi}_{\in H^1(G_{L|K},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} = \chi \cup \overline{\sigma_a} = \chi(\sigma_a) = \frac{r}{n} + \mathbb{Z}$$

def. von r.

$n = [L:K] = |G_{L|K}|$

Also folgt

$$\delta(\bar{\sigma}_a \cup \chi) = \delta(\chi(\bar{\sigma}_a)) = n\left(\frac{r}{n} + \mathbb{Z}\right) = r + n\mathbb{Z}$$

$$r + n\mathbb{Z} \in H^0(G_{L|K}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/|G_{L|K}|\mathbb{Z}$$

da: $H^{-1}(G_{L|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot n} H^0(G_{L|K}, \mathbb{Z})$

$$H^{-1}(G_{L|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, \qquad H^0(G_{L|K}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \to & 0 \qquad q = -1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \partial = N_G & & \\
0 & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \to & 0 \qquad q = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
a & \longmapsto & a + \mathbb{Z} \\
\downarrow & & \\
|G|a & \longmapsto & |G|a
\end{array}$$

Zusammenfassend: $\bar{a} \cup \delta\chi = u_{L|K} \cup (r + n\mathbb{Z})$

$$= \underbrace{(r + n\mathbb{Z})}_{H^0(G_{L|K}, \mathbb{Z})} \cup \underbrace{u_{L|K}}_{H^{-2}(G_{L|K}, A_L)} = u_{L|K}^r$$

$$\Longrightarrow \mathrm{inv}_{L|K}(\bar{a} \cup \delta\chi) = \mathrm{inv}_{L|K}(u_{L|K}^r) = \frac{r}{n} + \mathbb{Z} = \chi(\bar{\sigma}_a) \qquad \blacksquare$$

Satz: Sei $L|K$ unverzweigt und $[L:K] = f = [\bar{L} : \bar{K}]$.

Dann ist $N_{L|K}(L^\times) = \langle \pi_K^f \rangle \times U_K$

(unabhängig von π_K).

Beweis: $a \in N_{L|K}(L^\times)$

$\iff (a, L|K) = 1$

$\iff \varphi_{L|K}^{v_K(a)} = 1$

$\iff f \mid v_K(a)$, da $\langle \varphi_{L|K} \rangle = \mathrm{Gal}(L|K)$. ∎

§5 Das lokale Reziprozitätsgesetz

$$\begin{array}{c} K_0 \\ \big| \; {<\infty} \\ \mathbb{Q}_p \end{array}$$

ZIEL: $(G_{K_0}, K_0^{c\times})$ ist Klassenformation

$$\begin{array}{c} K_0^c \\ \big| \\ L \\ \big| \; \text{normal} \\ K \\ \big| \\ K_0 \end{array} \qquad (L|K_0: <\infty)$$

Setze: $G = \mathrm{Gal}(K_0^c / K_0)$

$$H^q(L|K) = H^q(\mathrm{Gal}(L|K), L^\times) = H^q(L|K, L^\times)$$

2. fundamentale Ungleichung

$\# H^2(L|K)$ teilt $[L:K]$

Beweis: Sei zunächst $L|K$ zyklisch von Primzahlgrad p

Bch: $$h(L^\times) = \frac{|H^2(L|K)|}{|H^1(L|K)|} = |H^2(L|K)| = p$$

Dazu: Ü7, A5 $\Longrightarrow$

$$h(L^\times) = q_{0,p}(K^\times)^p \Big/ q_{0,p}(L^\times)$$

wobei $$q_{0,p}(A) = \frac{(A : pA)}{({}_pA : 0)}$$

Also: $$q_{0,p}(K^\times) = \frac{(K^\times : (K^\times)^p)}{|\mu_p(K)|}$$

$$q_{0,p}(L^\times) = \frac{(L^\times : (L^\times)^p)}{|\mu_p(L)|}$$

Satz: Sei $K|\mathbb{Q}_p$ endlich. Dann gilt:
$$(K^\times : (K^\times)^m) = m \cdot q_K^{v_K(m)} \Big/ |\mu_m(K)|$$