

Vorlesung 22

8.7.2020



Wiederholung

$$K \quad K^x = \langle \pi_x \rangle \times \underbrace{M_{q-1} \times U_K^{(1)}}_{U_K = U_K^{(0)}}, \quad q = |\bar{K}|$$

$$|K| < \infty \quad = p^f$$

$$\mathbb{Q}_p \quad f = [\bar{K} : \mathbb{F}_p]$$

$$U_K^{(0)} \supseteq U_K^{(1)} \supseteq U_K^{(2)} \supseteq \dots$$

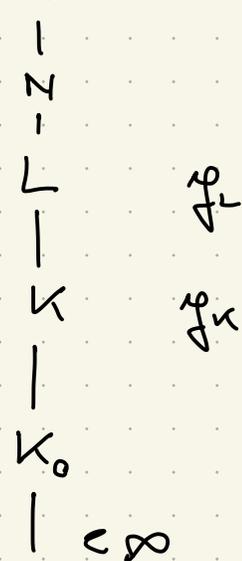
$$U_K^{(0)} / U_K^{(1)} \simeq \bar{K}^x, \quad \text{insbesondere } p \nmid \# U_K^{(0)} / U_K^{(1)}$$

$$U_K^{(n)} / U_K^{(n+1)} \simeq \bar{K}, \quad U_K^{(n)} / U_K^{(n+1)} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^f$$

Lemma: $U_K^{(n)} \xrightarrow[\simeq]{m} U_K^{(n+v_K(m))}, \quad n \gg 0$

Unverzweigte Erweiterungen

$$K_0^{ur} = T$$



max. unverzweigte Erweiterung von K_0

$$f_{L|K}(\alpha) \equiv \alpha^f \pmod{\mathfrak{f}_L}, \quad \alpha \in \mathcal{O}_L$$

$$f_{N|K} \Big|_L = f_{L|K}$$

$$f_{N|K}^{[L:K]} = f_{N|L}$$

\mathbb{Q}_p

SATZ: $(\text{Gal}(T/K_0), T^*)$ ist Klassenfunktion

Definition von $\text{inv}_{L/K}: H^2(L/K, L^\times) \xrightarrow{\cong} \frac{1}{[L:K]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$

$$0 \rightarrow \underbrace{U_L}_{\text{c.t.}} \rightarrow L^\times \xrightarrow{v_L} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad \text{exakt}$$

\Rightarrow

$$H^2(L/K, L^\times) \xrightarrow[\cong]{\bar{v}_L} H^2(L/K, \mathbb{Z}) \xrightarrow[\cong]{\delta^{-1}} H^1(L/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$\downarrow \text{inv}_{L/K}$$

$$\frac{1}{[L:K]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

$$\cong \chi(\mathcal{P}_{L/K})$$

$$\leftarrow \text{Hom}(\text{Gal}(L/K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$\leftarrow \chi$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{c.t.}} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Beweis: Axiom I ist HS 9. Für Axiom II ist Kommutativität von

$$H^2(L/K) \xrightarrow{\bar{v}_L} H^2(L/K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^{-1}} H^1(L/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{[L:K]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

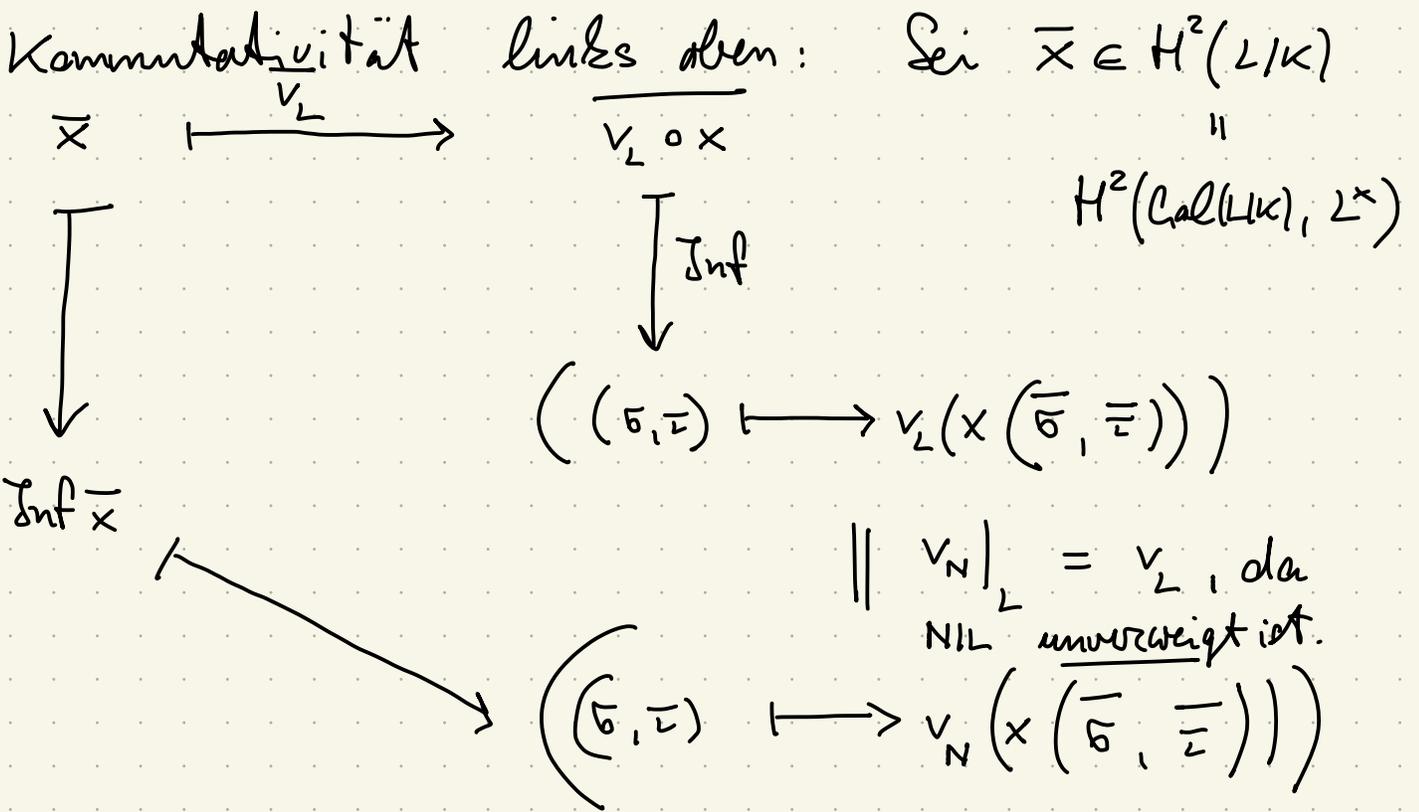
$$\downarrow \text{Inf} \quad \cong \quad \downarrow \text{Inf} \quad \cong \quad \downarrow \text{Inf} \quad \downarrow \subseteq$$

$$H^2(N/K) \xrightarrow{\bar{v}_N} H^2(N/K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^{-1}} H^1(N/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{[N:K]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

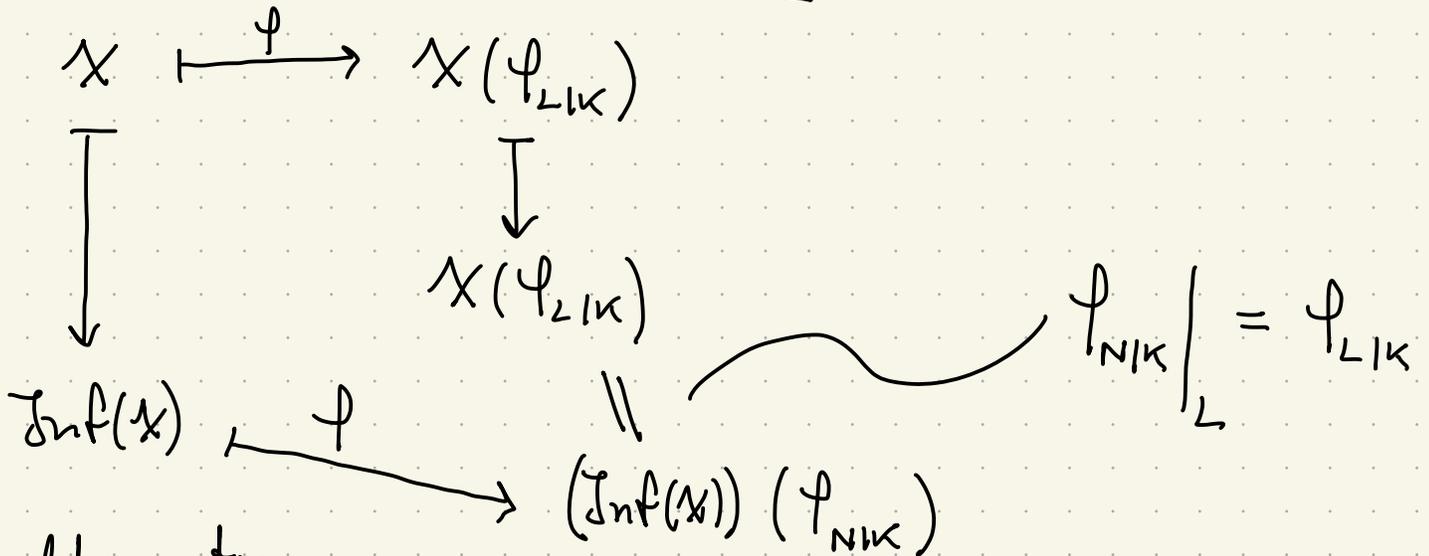
$$H^2(N/K) \xrightarrow{\bar{v}_N} H^2(N/K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^{-1}} H^1(N/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{[N:K]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

$$\downarrow \text{Res} \quad \cong \quad \downarrow \text{Res} \quad \cong \quad \downarrow \text{Res} \quad \downarrow \cdot [L:K]$$

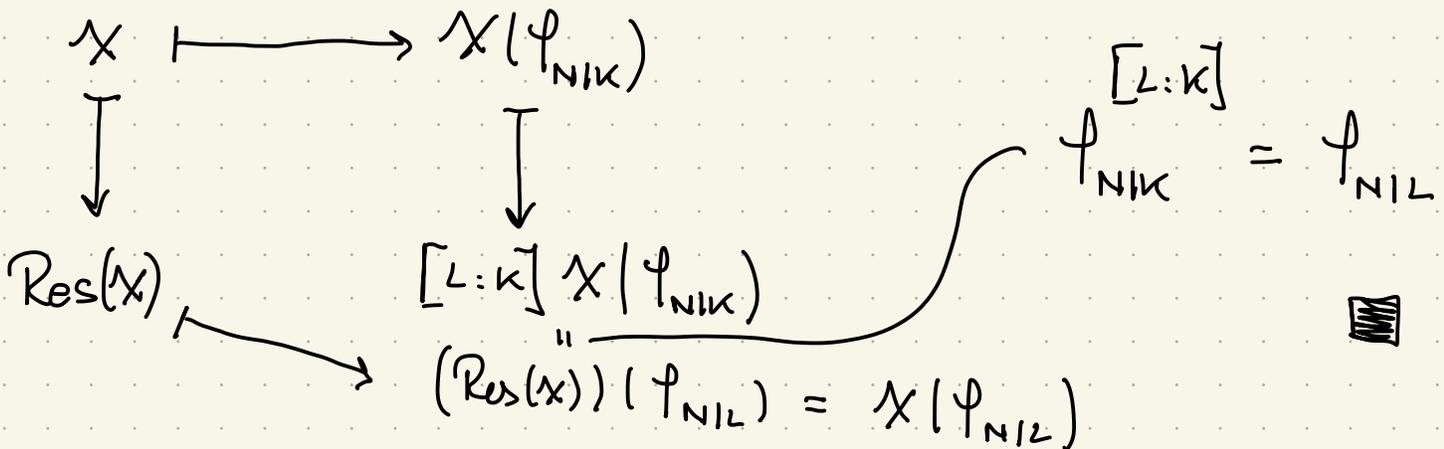
$$H^2(N/L) \xrightarrow{\bar{v}_N} H^2(N/L, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^{-1}} H^1(N/L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{[N:L]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$



Kommutativität rechts oben:



Rechts unten:



Satz: $H^2(\mathcal{T}) := \bigcup_{L/K_0} H^2(L/K_0, L^\times) \xrightarrow{\text{inv}_K} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
 endl. unverzweigt
 ist ein Isomorphismus.

Beweis: Die Surjektivität folgt aus

$$H^2(L/K_0, L^\times) \xrightarrow{\text{inv}_{L/K_0}} \frac{1}{[L:K_0]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

und der Tatsache, daß es zu $n \in \mathbb{N}$ eine unverzweigte Erweiterung K_n/K_0 gibt
 (Bew: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$) □

Wir haben ein Normensymbol $(-, L/K)$,
 so daß

$$0 \rightarrow N_{L/K}(L^\times) \rightarrow K^\times \xrightarrow{(-, L/K)} \text{Gal}(L/K) \rightarrow 0$$

" $\langle \varphi_{L/K} \rangle$

Satz: $(a, L/K) = \varphi_{L/K}^{\nu_K(a)}$ für alle $a \in K^\times$.

Wir dazu das

Lemma: Sei (G, A) eine Klassenformation und L/K normal. Sei $a \in A_K$ und $\bar{a} \in H^0(L/K) = A_K / N_{L/K} A_L$.
 Dann gilt für $\chi \in H^1(L/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}(G_{L/K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

$$\chi \left(\underbrace{(a, L|K)}_{C_{L|K}^{ab}} \right) = \text{inv}_{L|K} \left(\underbrace{\bar{a}}_{H^0(C_{L|K}, A_L)} \cup \underbrace{\delta X}_{H^2(C_{L|K}, \mathbb{Z})} \right) \text{ in } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

hierbei ist δ das Kohomologiemorphismus.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Beweis des Satzes:

$$\begin{aligned} \underline{\chi(a, L|K)} &\stackrel{\text{Lemma}}{=} \text{inv}_{L|K}(\bar{a} \cup \delta X) \\ &= (\varphi \circ \delta^{-1} \circ \bar{v}_L)(\bar{a} \cup \delta X) \\ &\stackrel{(*)}{=} (\varphi \circ \delta^{-1})(v_L(a) \delta X) \\ &= \varphi(v_L(a) X) = \varphi(v_K(a) X) = v_K(a) \varphi(X) \\ &= v_K(a) \chi(\varphi_{L|K}) \\ &= \underline{\underline{\chi(\varphi_{L|K}^{v_K(a)})}} \end{aligned}$$

Da dies für alle X gilt,
ist $(a, L|K) = \varphi_{L|K}^{v_K(a)}$

Zu (*): Es gilt allgemein für $q \geq 1$

$$\begin{aligned} H^0(C, A) \times H^q(C, B) &\xrightarrow{\cup} H^q(C, A \otimes B) \\ (\bar{a}_0, \bar{b}_q) &\longmapsto \bar{a}_0 \cup \bar{b}_q = \overline{a_0 \otimes b_q} \end{aligned}$$

wobei $a_0 \otimes b_q : C^q \longrightarrow A \otimes B, (\sigma_1, \dots, \sigma_q) \longmapsto a_0 \otimes b_q(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$

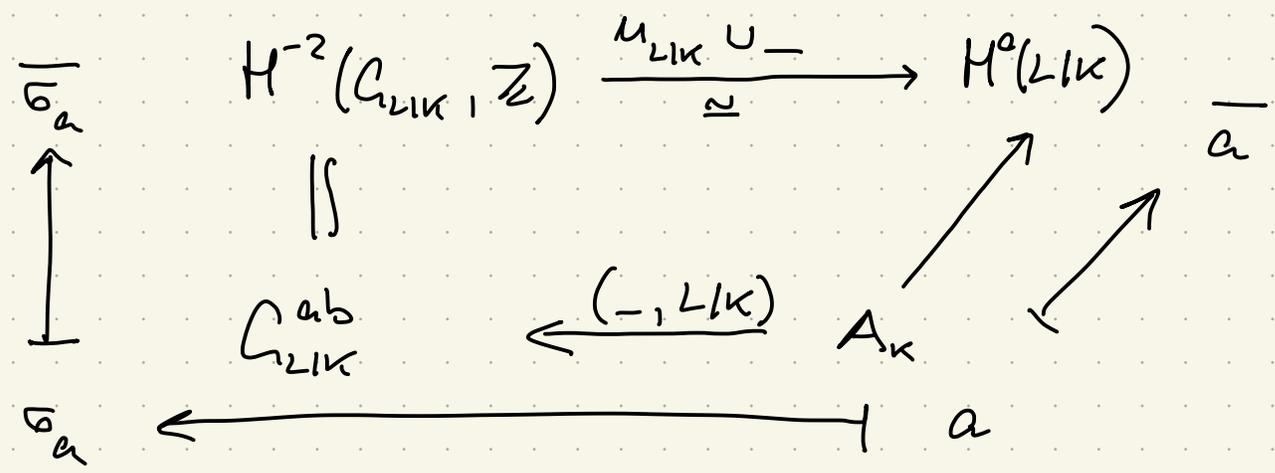
Beweis des Lemmas:

Setze $\bar{\sigma}_a = (a, L|K) \in C_{L|K}^{ab}$

Sei $C_{L|K}^{ab} \cong H^{-2}(C_{L|K}, \mathbb{Z})$

$\bar{\sigma}_a \longmapsto \overline{\sigma}_a$

Betrachte



$$\overline{\sigma}_a = \mu_{L|K} \cup \bar{\sigma}_a$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_a \cup \delta X &= (\mu_{L|K} \cup \bar{\sigma}_a) \cup \delta X \\ &= \mu_{L|K} \cup (\bar{\sigma}_a \cup \delta X) \\ &= \mu_{L|K} \cup \delta(\bar{\sigma}_a \cup X) \end{aligned}$$

für $A = \mathbb{Z}$.

Benutze die Rechenregel [Nur, I, (5.7)] oder [Sturckx, Lemma 2.71] \Rightarrow

$$\underbrace{\bar{\sigma}_a \cup X}_{\in H^{-2}(C_{L|K}, \mathbb{Z})} = \underbrace{X \cup \bar{\sigma}_a}_{\in H^1(C_{L|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \stackrel{\downarrow}{=} X(\bar{\sigma}_a) = \frac{r}{n} + \mathbb{Z}$$

$n = [L:K] = |C_{L|K}|$

Also folgt

$$\delta(\bar{\sigma}_a \circ X) = \delta(X(\bar{\sigma}_a)) = n \left(\frac{\tau}{n} + \mathbb{Z} \right) = \tau + n\mathbb{Z}$$

$$H^0(C_{L|K}, \mathbb{Z})$$

$$\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$$

da: $H^{-1}(C_{L|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot n} H^0(C_{L|K}, \mathbb{Z})$

$$\parallel$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} / \mathbb{Z}$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$$q = -1$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \partial = N_{\mathbb{Q}}$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$$q = 0$$

$$a \mapsto a + \mathbb{Z}$$

$$\downarrow$$

$$|G|a \mapsto |G|a$$

Zusammenfassend: $\bar{a} \circ \delta X = \mu_{L|K} \cup (\tau + n\mathbb{Z})$

$$= \underbrace{(\tau + n\mathbb{Z})}_{H^0(C_{L|K}, \mathbb{Z})} \cup \underbrace{\mu_{L|K}}_{H^{-2}(C_{L|K}, A_L)} = \mu_{L|K}^{\tau}$$

$$\Rightarrow \text{inv}_{L|K}(\bar{a} \circ \delta X) = \text{inv}_{L|K}(\mu_{L|K}^{\tau}) = \frac{\tau}{n} + \mathbb{Z} = X(\bar{\sigma}_a)$$



Satz: Sei $L|K$ unverzweigt und $[L:K] = f = [\bar{L}:\bar{K}]$.

Dann ist $N_{L|K}(L^\times) = \langle \pi_K^f \rangle \times \mathcal{O}_K^\times$

(unabhängig von π_K).

Beweis: $a \in N_{L|K}(L^\times)$

$$\Leftrightarrow (a, L|K) = 1$$

$$\Leftrightarrow f_{L|K}^{v_K(a)} = 1$$

$$\Leftrightarrow f \mid v_K(a) \quad , \quad \text{da } \langle f_{L|K} \rangle = \text{Gal}(L|K).$$

§5 Das lokale Reziprozitätsgesetz

$$K_0$$

$| < \infty$

ZIEL: $(G_{K_0}, K_0^{c \times})$ ist Klassenformation

$$\mathbb{Q}_p$$

Setze: $G = \text{Gal}(K_0^c / K_0)$

$$K_0^c$$

$$H^q(L|K) = H^q(\text{Gal}(L|K), L^\times)$$

$$|$$

$$= H^q(L|K, L^\times)$$

$$\left. \begin{array}{l} L \\ | \\ K \\ | \\ K_0 \end{array} \right\} \text{normal} < \infty$$

2. fundamentale Ungleichung

$$\# H^2(L|K) \text{ teilt } [L:K]$$

Beweis: Sei z ein Element $L|K$ zyklisch von Primzahlgrad p

Beh:
$$h(L^x) = \frac{|H^2(L|K)|}{|H^1(L|K)|} = |H^2(L|K)| = p$$

Dazu: $\text{Ü7, A5} \Rightarrow$

$$h(L^x) = \frac{f_{0,p}(K^x)^p}{f_{0,p}(L^x)}$$

wobei
$$f_{0,p}(A) = \frac{(A : pA)}{(pA : 0)}$$

Also:
$$f_{0,p}(K^x) = \frac{(K^x : (K^x)^p)}{|M_p(K)|}$$

$$f_{0,p}(L^x) = \frac{(L^x : (L^x)^p)}{|M_p(L)|}$$

Satz: Sei $K|\mathbb{Q}_p$ endlich. Dann gilt:

$$(K^x : (K^x)^m) = m \cdot f_K^{v_K(m)} |M_m(K)|$$