

Vorlesung 22

---

8.7.2020

---

---

---

---



# Wiederholung

$$K \quad K^x = \langle \pi_K \rangle \times \underbrace{M_{q-1} \times U_K^{(1)}}_{U_K = U_K^{(0)}}, \quad q = |\bar{K}|$$

$$|K| < \infty \quad = p^f$$

$$\mathbb{Q}_p \quad f = [\bar{K} : \mathbb{F}_p]$$

$$U_K^{(0)} \supseteq U_K^{(1)} \supseteq U_K^{(2)} \supseteq \dots$$

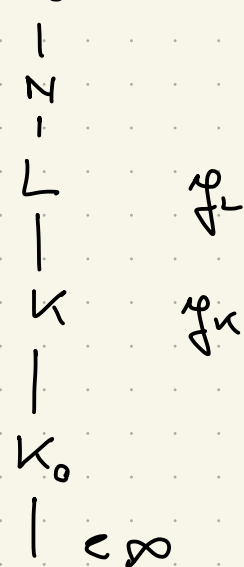
$$U_K^{(0)} / U_K^{(1)} \simeq \bar{K}^x, \quad \text{insbesondere } p \nmid \# U_K^{(0)} / U_K^{(1)}$$

$$U_K^{(n)} / U_K^{(n+1)} \simeq \bar{K}, \quad U_K^{(n)} / U_K^{(n+1)} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^f$$

Lemma:  $U_K^{(n)} \xrightarrow[\simeq]{m} U_K^{(n+v_K(m))}, \quad n \gg 0$

## Unverzweigte Erweiterungen

$$K_0^{ur} = T$$



max. unverzweigte Erweiterung von  $K_0$

$$f_{L|K}(\alpha) \equiv \alpha^f \pmod{\mathfrak{f}_L}, \quad \alpha \in \mathcal{O}_L$$

$$f_{N|K} \Big|_L = f_{L|K}$$

$$f_{N|K}^{[L:K]} = f_{N|L}$$

$\mathbb{Q}_p$

SATZ:  $(\text{Gal}(T/K_0), T^*)$  ist Klassenfunktion

Definition von  $\text{inv}_{L/K}: H^2(L/K, L^x) \xrightarrow{\cong} \frac{1}{[L:K]} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$

$$0 \rightarrow \underbrace{U_L}_{\text{c.t.}} \rightarrow L^x \xrightarrow{v_L} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad \text{exakt}$$

$\Rightarrow$

$$H^2(L/K, L^x) \xrightarrow[\cong]{\bar{v}_L} H^2(L/K, \mathbb{Z}) \xrightarrow[\cong]{\delta^{-1}} H^1(L/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$\downarrow \text{inv}_{L/K}$$

$$\frac{1}{[L:K]} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$$

$$\cong \chi(\mathcal{P}_{L/K})$$

$$\begin{array}{c} \cong \\ \leftarrow \text{Hom}(\text{Gal}(L/K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \leftarrow \chi \end{array}$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{c.t.}} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

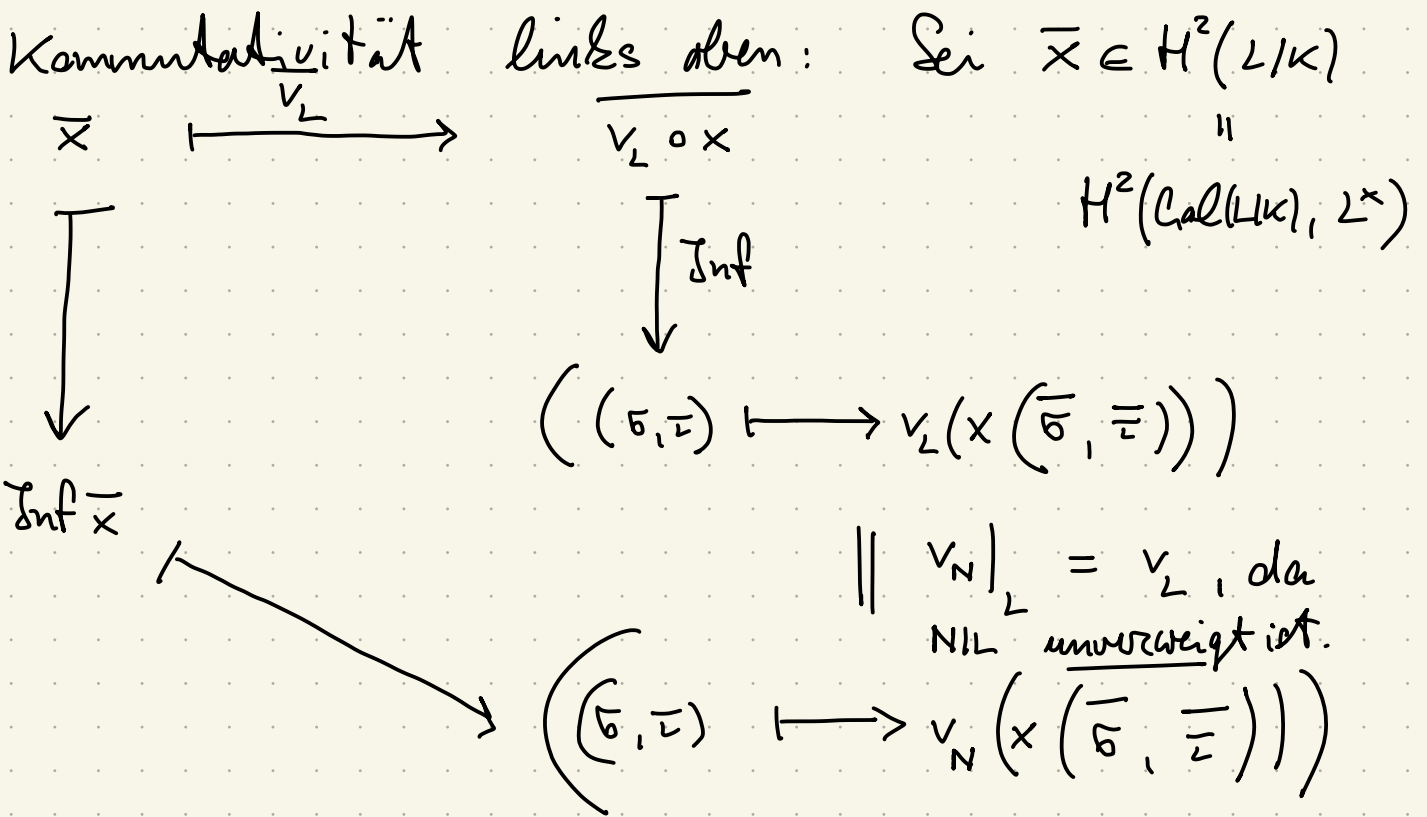
Beweis: Axiom I ist HS & D. Für Axiom II ist Kommutativität von

$$H^2(L/K) \xrightarrow{\bar{v}_L} H^2(L/K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^{-1}} H^1(L/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{[L:K]} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$$

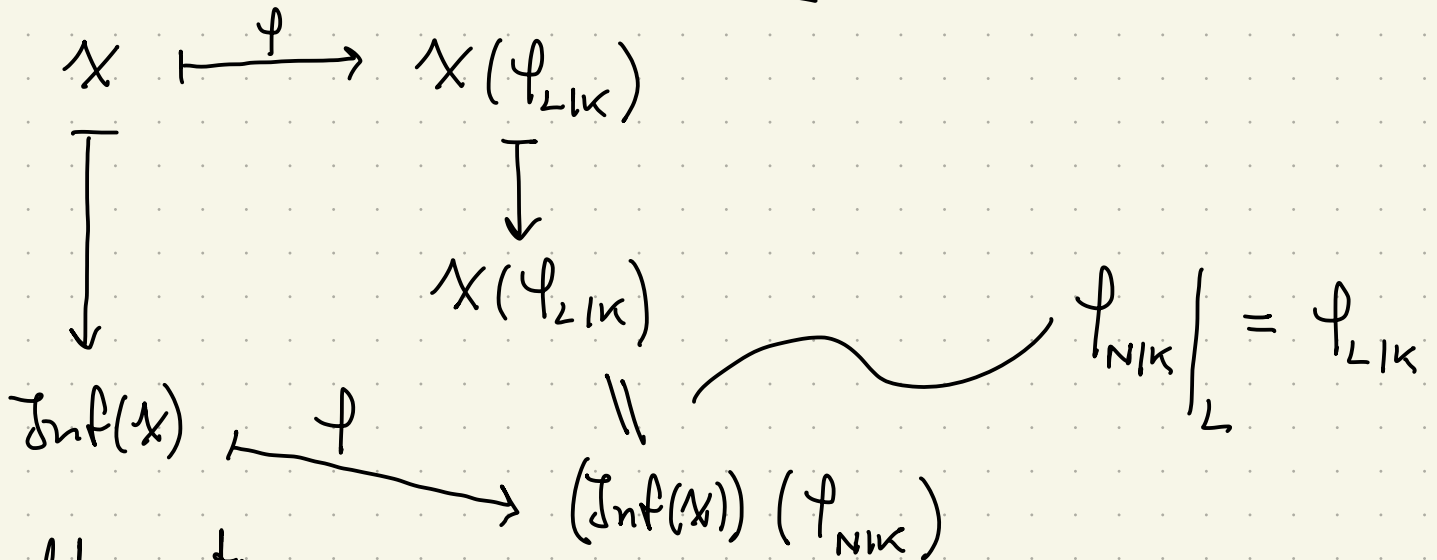
$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow \text{Inf} & \cong & \downarrow \text{Inf} & \cong & \downarrow \text{Inf} & & \downarrow \subseteq \\ H^2(N/K) & \xrightarrow{\bar{v}_N} & H^2(N/K, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta^{-1}} & H^1(N/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi} & \frac{1}{[N:K]} \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \end{array}$$

$$H^2(N/K) \xrightarrow{\bar{v}_N} H^2(N/K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta^{-1}} H^1(N/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{[N:K]} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$$

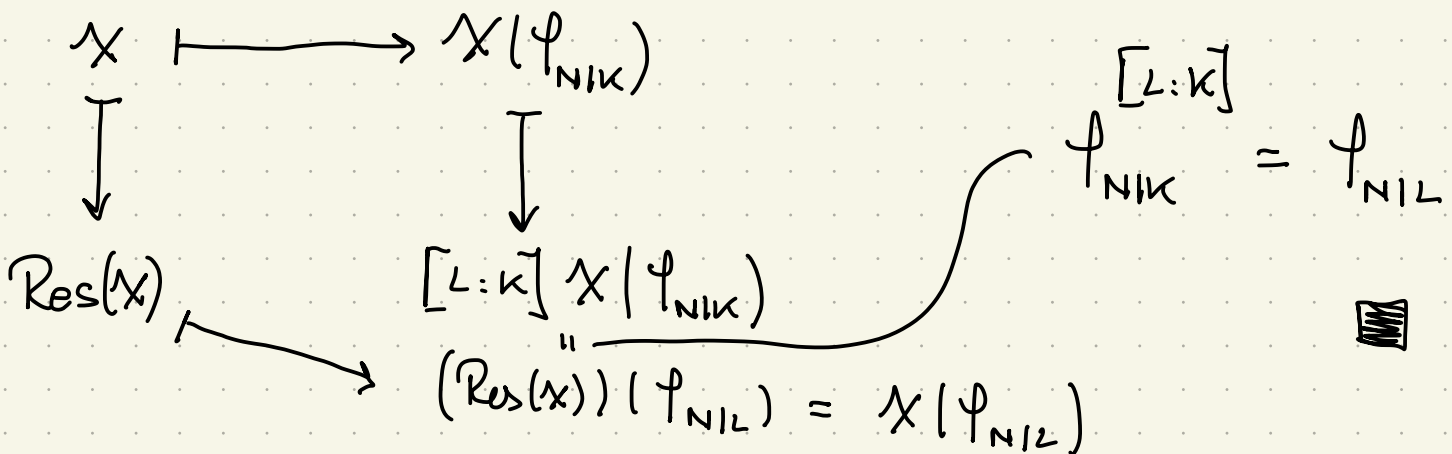
$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow \text{Res} & \cong & \downarrow \text{Res} & \cong & \downarrow \text{Res} & & \downarrow \cdot [L:K] \\ H^2(N/L) & \xrightarrow{\bar{v}_N} & H^2(N/L, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta^{-1}} & H^1(N/L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi} & \frac{1}{[N:L]} \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \end{array}$$



Kommutativität rechts oben:



Rechts unten:



Satz:  $H^2(\mathcal{T}) := \bigcup_{L/K_0} H^2(L/K_0, L^\times) \xrightarrow{\text{inv}_K} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$   
 endl. unverzweigt  
 ist ein Isomorphismus.

Beweis: Die Surjektivität folgt aus

$$H^2(L/K_0, L^\times) \xrightarrow{\text{inv}_{L/K_0}} \frac{1}{[L:K_0]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

und der Tatsache, daß es zu  $n \in \mathbb{N}$  eine unverzweigte Erweiterung  $K_n/K_0$  gibt  
 (Bew:  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ ) □

Wir haben ein Normensymbol  $(-, L/K)$ ,  
 so daß

$$0 \rightarrow N_{L/K}(L^\times) \rightarrow K^\times \xrightarrow{(-, L/K)} \text{Gal}(L/K) \rightarrow 0$$

"  $\langle \varphi_{L/K} \rangle$

Satz:  $(a, L/K) = \varphi_{L/K}^{\nu_K(a)}$  für alle  $a \in K^\times$ .

Wir dazu das

Lemma: Sei  $(G, A)$  eine Klassenformation und  $L/K$  normal. Sei  $a \in A_K$  und  $\bar{a} \in H^0(L/K) = A_K / N_{L/K} A_L$ .  
 Dann gilt für  $\chi \in H^1(L/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}(G_{L/K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

$$\chi \left( \underbrace{(a, L|K)}_{C_{L|K}^{ab}} \right) = \text{inv}_{L|K} \left( \underbrace{\bar{a}}_{H^0(C_{L|K}, A_L)} \cup \underbrace{\delta X}_{H^2(C_{L|K}, \mathbb{Z})} \right) \text{ in } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

hierbei ist  $\delta$  das Kohomologiemorphism.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Beweis des Satzes:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\chi(a, L|K)}} &\stackrel{\text{Lemma}}{=} \text{inv}_{L|K}(\bar{a} \cup \delta X) \\ &= (\varphi \circ \delta^{-1} \circ \bar{v}_L)(\bar{a} \cup \delta X) \\ &\stackrel{(*)}{=} (\varphi \circ \delta^{-1})(v_L(a) \delta X) \\ &= \varphi(v_L(a) X) = \varphi(v_K(a) X) = v_K(a) \varphi(X) \\ &= v_K(a) \chi(\varphi_{L|K}) \\ &= \underline{\underline{\chi(\varphi_{L|K}^{v_K(a)})}} \end{aligned}$$

Da dies für alle  $X$  gilt,

$$\text{ist } (a, L|K) = \varphi_{L|K}^{v_K(a)}$$

Zu (\*): Es gilt allgemein für  $q \geq 1$

$$\begin{aligned} H^0(C, A) \times H^q(C, B) &\xrightarrow{\cup} H^q(C, A \otimes B) \\ (\bar{a}_0, \bar{b}_q) &\longmapsto \bar{a}_0 \cup \bar{b}_q = \overline{a_0 \otimes b_q} \end{aligned}$$

$$\text{wobei } a_0 \otimes b_q : C^q \longrightarrow A \otimes B, (\sigma_1, \dots, \sigma_q) \longmapsto a_0 \otimes b_q(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$$

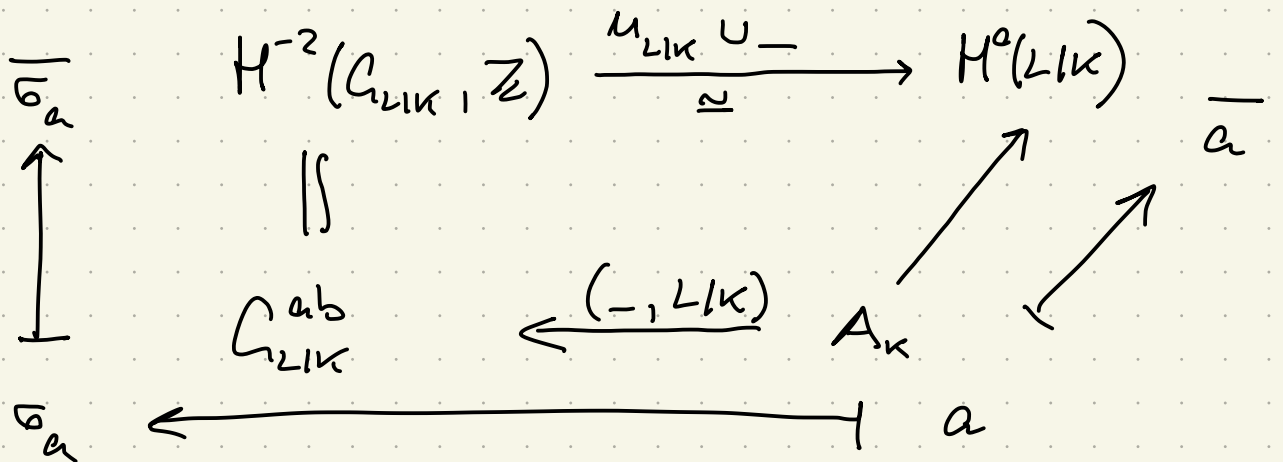
Beweis des Lemmas:

Setze  $\bar{\sigma}_a = (a, L|K) \in C_{L|K}^{ab}$

Sei  $C_{L|K}^{ab} \cong H^{-2}(C_{L|K}, \mathbb{Z})$

$\bar{\sigma}_a \longmapsto \overline{\sigma}_a$

Betrachte



$$\overline{\sigma}_a = \mu_{L|K} \cup \bar{\sigma}_a$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_a \cup \delta X &= (\mu_{L|K} \cup \bar{\sigma}_a) \cup \delta X \\ &= \mu_{L|K} \cup (\bar{\sigma}_a \cup \delta X) \\ &= \mu_{L|K} \cup \delta(\bar{\sigma}_a \cup X) \end{aligned}$$

für  $A = \mathbb{Z}$ .

Benutze die Rechenregel [Nur, I, (5.7)] oder [Sturckx, Lemma 2.71]  $\Rightarrow$

$$\underbrace{\bar{\sigma}_a \cup X}_{\in H^{-2}(C_{L|K}, \mathbb{Z})} = \underbrace{X \cup \bar{\sigma}_a}_{\in H^1(C_{L|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \stackrel{\downarrow}{=} X(\bar{\sigma}_a) = \frac{r}{n} + \mathbb{Z}$$

$n = [L:K] = |C_{L|K}|$

Also folgt

$$\delta(\bar{\sigma}_a \circ X) = \delta(X(\bar{\sigma}_a)) = n \left( \frac{\tau}{n} + \mathbb{Z} \right) = \tau + n\mathbb{Z}$$

$$H^0(C_{L|K}, \mathbb{Z})$$

$$\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$$

da:  $H^{-1}(C_{L|K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot n} H^0(C_{L|K}, \mathbb{Z})$

$$\parallel$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} / \mathbb{Z}$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$$q = -1$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \partial = N_{\mathbb{Q}}$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$$q = 0$$

$$a \mapsto a + \mathbb{Z}$$

$$\downarrow$$

$$|G|a \mapsto |G|a$$

Zusammenfassend:  $\bar{a} \circ \delta X = \mu_{L|K} \cup (\tau + n\mathbb{Z})$

$$= \underbrace{(\tau + n\mathbb{Z})}_{H^0(C_{L|K}, \mathbb{Z})} \cup \underbrace{\mu_{L|K}}_{H^{-2}(C_{L|K}, A_L)} = \mu_{L|K}^{\tau}$$

$$\Rightarrow \text{inv}_{L|K}(\bar{a} \circ \delta X) = \text{inv}_{L|K}(\mu_{L|K}^{\tau}) = \frac{\tau}{n} + \mathbb{Z} = X(\bar{\sigma}_a)$$



Satz: Sei  $L|K$  unverzweigt und  $[L:K] = f = [\bar{L}:\bar{K}]$ .

Dann ist  $N_{L|K}(L^\times) = \langle \pi_K^f \rangle \times \mathcal{O}_K^\times$

(unabhängig von  $\pi_K$ ).

Beweis:  $a \in N_{L|K}(L^\times)$

$$\Leftrightarrow (a, L|K) = 1$$

$$\Leftrightarrow f_{L|K}^{v_K(a)} = 1$$

$$\Leftrightarrow f \mid v_K(a) \quad , \quad \text{da } \langle f_{L|K} \rangle = \text{Gal}(L|K).$$

## §5 Das lokale Reziprozitätsgesetz

$$K_0$$

|  $< \infty$

ZIEL:  $(G_{K_0}, K_0^{\text{c}\times})$  ist Klassenformation

$$\mathbb{Q}_p$$

Setze:  $G = \text{Gal}(K_0^{\text{c}}/K_0)$

$$K_0^{\text{c}}$$

$$H^q(L|K) = H^q(\text{Gal}(L|K), L^\times)$$

|

$$= H^q(L|K, L^\times)$$

$$\left. \begin{array}{l} L \\ | \\ K \\ | \\ K_0 \end{array} \right\} \text{normal} < \infty$$

2. fundamentale Ungleichung

$$\#H^2(L|K) \text{ teilt } [L:K]$$

Beweis: Sei zweifach L/K zyklisch von Primzahlgrad p

Beh: 
$$h(L^x) = \frac{|H^2(L|K)|}{|H^1(L|K)|} = |H^2(L|K)| = p$$

Dazu: Ü7, A5  $\Rightarrow$

$$h(L^x) = \frac{f_{0,p}(K^x)^p}{f_{0,p}(L^x)}$$

wobei 
$$f_{0,p}(A) = \frac{(A : pA)}{(pA : 0)}$$

Also: 
$$f_{0,p}(K^x) = \frac{(K^x : (K^x)^p)}{|M_p(K)|}$$

$$f_{0,p}(L^x) = \frac{(L^x : (L^x)^p)}{|M_p(L)|}$$

|| Satz: Sei  $K|\mathbb{Q}_p$  endlich. Dann gilt:

$$(K^x : (K^x)^m) = m \cdot f_K^{v_K(m)} |M_m(K)|$$