Vorlesung 21

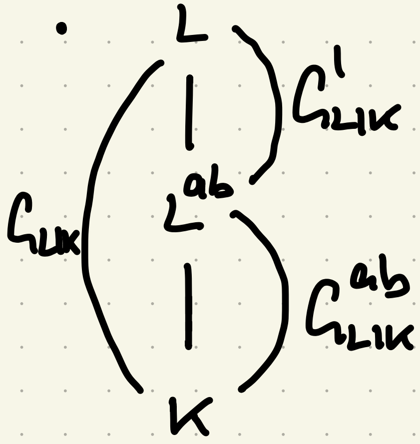
6.7.2020

Wiederholung

(G, A) Klassenformation

$$A_K \xrightarrow{(-, L|K)} G^{ab}_{L|K} \quad , \quad L|K \text{ normal}$$

- $a \in \ker(-, L|K) \iff a \in N_{L|K} A_L$

- 

max. ab. Teilerweiterung

- $N_{L|K} A_L = N_{L^{ab}|K} A_{L^{ab}} \leq A_K$

- $\# A_K / N_{L|K} A_L \mid [L:K]$

Es gilt:

Gleichheit $\iff L^{ab} = L$

SATZ: $\{\text{ab. } L|K\} \underset{1-1}{\longleftrightarrow} \{\text{Normengruppen } I \leq A_K\}$

$$L \longmapsto I_L := N_{L|K} A_L$$

ZIELE: ① $(G_k, \bar{k}^*)$ ist Klassenformation

$$\begin{tikzcd} k \arrow[d, dash, "<\infty"] \\ \mathbb{Q}_p \end{tikzcd}$$

② Intrinsische Beschreibung der Normengruppen $I \leq k^*$

Galoiskohomologie

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dash, "G"] \\ K \end{tikzcd}$$

Satz: $H^q(G, L) = 0 \ , \ \forall q \in \mathbb{Z}$

Bew: $L \cong K[G]$ und $K[G]$ ist induziert ■

Satz: a) $H^1(G, L^\times) = 1$ (HS 90)

b) Falls $L|K$ zyklisch ist, $Gal(L|K) = \langle \sigma \rangle$, so gilt für alle $\alpha \in L^\times$:

$$N_{L|K}(\alpha) = 1 \iff \exists \beta \in L^\times : \alpha = \beta^\sigma / \beta = \beta^{\sigma - 1}$$

$$\left(\underset{\substack{\| \\ \text{Kern der Norm} / L^{\times (\sigma-1)\mathbb{Z}[G]}}}{H^{-1}(G, L^\times)} = H^1(G, L^\times) = 0 \right)$$

■

Folgerung: Falls $L|K$ eine endliche Erweiterung von endlichen Körpern ist, so ist $L^\times$ c.t., d.h.

$$H^q(U, L^\times) = 1 \ , \ \forall q \in \mathbb{Z}, \ U \le G$$

Bew:

$$\left. \begin{array}{l} \text{HS 90} \Rightarrow H^1(U, L^\times) = 1 \\ 1 \underset{\uparrow \text{ da } |L^\times| < \infty}{=} h(L^\times) = \dfrac{\# H^0(U, L^\times)}{\# H^1(U, L^\times)} \end{array} \right\} \Rightarrow H^0(U, L^\times) = 1 \text{ und } U \text{ ist zyklisch.}$$

■

Die mult. Gruppe $K^\times$, $[K:\mathbb{Q}_p]<\infty$

Notationen:

$v_K = v$ normierte Bewertung, $v_K(K^\times)=\mathbb{Z}$

$\mathcal{O}_K$ Bewertungsring $=\{\alpha\in K^\times \mid v_K(\alpha)\geq 0\}$

$\mathfrak{p}_K$ $>$

$\shortparallel$

(π_K) $\pi=\pi_K$ Primelement, $v_K(\pi_K)=1$

$\bar{K} = \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K$ Restklassenkörp.

$$\begin{tikzcd} K^c \arrow[d, dash] \\ \bar{K} \end{tikzcd}$$

alg. Abschluss

$U = U_K = \mathcal{O}_K^\times$

$\rotatebox{90}{$\leq$}$

$U^{(n)} = U_K^{(n)} = 1+\mathfrak{p}_K^n$, $n\geq 1$ $(U^{(0)}=U)$

$q = q_K = |\bar{K}| = p^f$, $f = f_{K|\mathbb{Q}_p}$

$= [\bar{K}:\mathbb{F}_p]$

Es gilt: $K^\times = \langle\pi\rangle\times U$

Satz: $U/U^{(1)} \simeq \bar{K}^\times$, $U^{(n)}/U^{(n+1)} \simeq \bar{K}$, $\forall n\geq 1$

Bew: $U \twoheadrightarrow \bar{K}^\times$, $u\longmapsto u+\mathfrak{p}_K$

hat Kern $U^{(1)}$

$$\mathcal{U}^{(n)} \twoheadrightarrow \bar{\kappa}\,, \quad 1 + a\pi^n \mapsto \bar{a} = a + \mathfrak{p}_K$$

$$a \in \mathcal{O}_K \qquad\qquad n \geq 1$$

ist ein Homom., da

$$(1 + a\pi^n)(1 + b\pi^n) = 1 + (a+b)\pi^n + ab\,\pi^{2n}$$

$$= 1 + \underbrace{(a + b + ab\pi^n)}\pi^n$$

$$\mapsto \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$$

Der Kern ist $1 + \mathfrak{p}_K^{n+1} = \mathcal{U}_K^{(n+1)}$. ■

Lemma Sei $m \geq 1$. Dann induziert $x \mapsto x^m$ für $n \gg 0$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{U}^{(n)} \xrightarrow[\sim]{-^m} \mathcal{U}^{(n + v_K(m))}$$

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_K^{(n)} \arrow[r, "\log", "\simeq"'] \arrow[d, "-^m", "\simeq"'] & \mathfrak{p}_K^n \arrow[d, "\cdot m", "\simeq"'] \\
\mathcal{U}_K^{(n + v_K(m))} & m\,\mathfrak{p}_K^n = \mathfrak{p}_K^{v_K(m)+n} \arrow[l, "\log^{-1} = \exp"']
\end{tikzcd}$$

$$n \geq \frac{e_{K|\mathbb{Q}_p}}{p-1}$$

■

Erinnerung: $K^\times \cong \mathbb{Z} \times \mathcal{U}_K \cong \mathbb{Z} \times \mu_{q-1} \times \mathcal{U}_K^{(1)}$

$$\cong \mathbb{Z} \times \mu_{q-1} \times \boxed{\mathcal{U}_K^{(1)} / \mathcal{U}_K^{(n)}} \times \mathbb{Z}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]} \qquad \cong \mu_{p^a}$$

■

Die Klassenformation der unverzweigten Erweiterungen von K, $[K:\mathbb{Q}_p]<\infty$.

Sei

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dash, "\text{unverzweigt}"] \\ K \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Q}_p \end{tikzcd}$$

$q = q_K$

Zu $m \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine unverzweigte Erweiterung K_m von K mit $[K_m : K] = m$

Sei $\varphi_{L|K} \in Gal(L|K)$ der <u>Frobenius</u>, d.h.

$$\varphi_{L|K}(\alpha) = \alpha^q \pmod{\mathfrak{p}_L} \qquad \alpha \in L$$

Es gilt: $\langle \varphi_{L|K} \rangle = Gal(L/K)$

Eigenschaften:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, dash] \\ L \arrow[d, dash] \\ K \end{tikzcd} \quad \text{unverzweigt}$$

- $\varphi_{N|K}\big|_L = \varphi_{L|K}$
- $\varphi_{N|L} = \varphi_{N|K}^{[L:K]}$

Zusammenhang zur Übung:

$T :=$ max. unverzweigte Erweiterung von $K = \bigcup_{n\geq 1} K_n \subseteq K^c$

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(T|K) &= \varprojlim_n \mathrm{Gal}(K_n|K) \\ &= \varprojlim_n \langle \varphi_{K_n|K} \rangle \qquad \qquad \varphi_{K_n|K} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \updownarrow \\ &\cong \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \qquad\qquad 1 + n\mathbb{Z} \\ &= \hat{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Satz: Sei $L|K$ unverzweigt mit $G = \mathrm{Gal}(L|K)$.
Dann gilt: $H^q(G, U_L) = 1$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.
D.h. U_L ist c.t.

Beweis:

$$G = \mathrm{Gal}(L|K) \cong \mathrm{Gal}(\bar{L}|\bar{K})$$

$$\sigma \longmapsto \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma}(\bar{a}) := \overline{\sigma(a)}$$

$$\bar{a} = a + \mathfrak{p}_L$$
$$a \in \mathcal{O}_L$$

Dann ist

$$0 \longrightarrow U_L^{(1)} \longrightarrow U_L \longrightarrow \bar{L}^\times \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von G-Moduln. Da $\bar{L}^\times$ c.t. ist

$$H^q(G, U_L^{(1)}) \cong H^q(G, U_L)$$

Sei $\pi = \pi_K$. Da $L|K$ unverzweigt ist, ist π auch ein Primelement in L.

Betrachte $U_L^{(n-1)} \longrightarrow \overline{L}$

$1 + a\pi^{n-1} \longmapsto \overline{a}$, $a \in \mathcal{O}_L$

Dies ist ein Homom. (wie früher) von G-Moduln, <u>denn:</u>

$$\begin{tikzcd}
\sigma(1+a\pi^{n-1}) \overset{\downarrow}{=} 1+\sigma(a)\pi^{n-1} \arrow[d, mapsto] \\
\overline{\sigma(a)} = \sigma\overline{a}
\end{tikzcd}$$

Die Sequenz

$$0 \to U_L^{(n)} \longrightarrow U_L^{(n-1)} \longrightarrow \overline{L} \to 0$$

ist exakt. Da $\overline{L}$ c.t. ist, folgt

$$H^q(G, U_L^{(n)}) \simeq H^q(G, U_L^{(1)}) \simeq H^q(G, U_L)$$

Sei $U_L^{(n)} \xrightarrow[\simeq]{-^m} U_L^{(n+v_L(m))}$ für $n >> 0$.

Betrachte

$$\begin{tikzcd}
H^q(G, U_L^{(n)}) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "-^m", "\simeq"'] & H^q(G, U_L) \arrow[d, "-^m"] \\
H^q(G, U_L^{(n+v_L(m))}) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & H^q(G, U_L)
\end{tikzcd}$$

Mult. mit $m \in \mathbb{N}$ ist also ein Iso.

Nimm $m = |G| \implies$

$$1 = m \cdot H^q(G, U_L) \implies H^q(G, U_L) = 1.$$

∎

<u>Folgerung:</u> $L|K$ unverzweigt

$$\implies \underset{\displaystyle U_K / N_{L|K}(U_L)}{\underset{\shortparallel}{H^0(G, U_L)}} = 1 \implies \underline{\underline{N_{L|K}(U_L) = U_K.}}$$

∎

<u>ZIEL:</u> T sei die max. unverzweigte Erweiterung von K_0

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}_p^c \arrow[d, dash] \\
T \arrow[d, dash] \arrow[ddd, dash, bend left=60, "\text{max. unverzweigt}"] \\
L \arrow[d, dash] \\
K \arrow[d, dash] \\
K_0 \arrow[d, dash, "<\infty"] \\
\mathbb{Q}_p
\end{tikzcd}$$

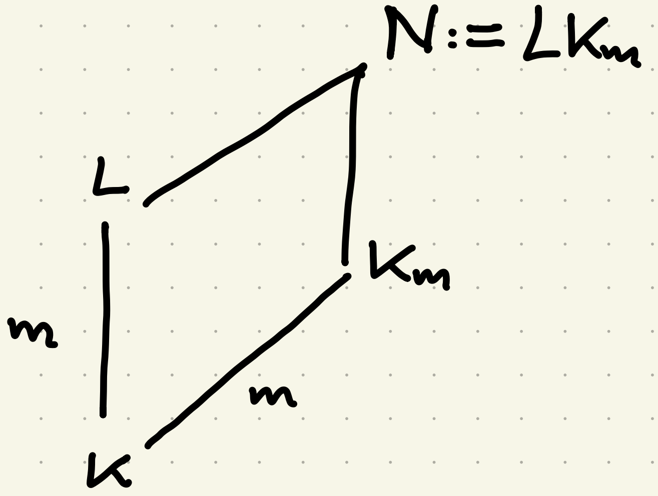
$(\mathrm{Gal}(T|K_0), T^\times)$ ist eine Klassenformation

Dazu sind Invariantenabb.

$$\mathrm{inv}_{L|K} : H^2(\mathrm{Gal}(L|K), L^\times) \longrightarrow \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

Später: Sei L/K abelsch (wir erlauben Verzweigung). Wie wird

$$\mathrm{inv}_{L|K} : H^2(\mathrm{Gal}(L|K), L^\times) \longrightarrow \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$



unverzweigt mit $[K_m : K] = [L : K]$

$$\begin{tikzcd}
H^2(L/K, L^\times) \arrow[r, hook, "\mathrm{inf}"] \arrow[d, dotted, "\mathrm{inv}_{L|K}"] & H^2(N/K, N^\times) \\
\frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} & H^2(K_m|K, K_m^\times) \arrow[l, "\mathrm{inv}_{K_m|K}"'] \arrow[u, hook, "\mathrm{inf}"']
\end{tikzcd}$$

Es gilt: $\mathrm{inf}(H^2(L/K, L^\times) = \mathrm{inf}(H^2(K_m|K, K_m^\times))$

Zurück zum unverzweigten:

$$0 \longrightarrow \underbrace{U_L}_{\text{c.t.}} \longrightarrow L^\times \xrightarrow{v_L} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad H^2(G, L^\times) \xrightarrow[\simeq]{\overline{v_L}} H^2(G, \mathbb{Z})$$

$G = \mathrm{Gal}(L|K)$

Betrachte

$$0 \to \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{c.t.}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

$$\begin{tikzcd}
\Rightarrow \quad H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & H^2(G, \mathbb{Z}) \\
\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi"] & \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \\
\chi \arrow[r, mapsto] & \chi(\varphi_{L|K})
\end{tikzcd}$$

Zusammenfassung:

$$\mathrm{inv}_{L|K} = \varphi \circ \delta^{-1} \circ \overline{v_L} \; : \; H^2(G, L^\times) \longrightarrow \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

SATZ: ($\mathrm{Gal}(T|K_0)$) ist eine Klassenformation

Beweis: Axiom I ist HS 90

Für II a) und II b) ist zu zeigen:

$$\begin{tikzcd}
H^2(L|K) \arrow[r, "\bar{v}_L"] \arrow[d, "\inf"] \arrow[d, phantom, "\subseteq", shift right=4ex] \arrow[dr, phantom, "///"] & H^2(L|K, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^{-1}"] \arrow[d, "\inf"] \arrow[dr, phantom, "///"] & H^1(L|K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\inf"'] & \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[d, "\subseteq"] \\
H^2(N|K) \arrow[r, "\bar{v}_N"] & H^2(N|K, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^{-1}"] & H^1(N|K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & \frac{1}{[N:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

das ist zu zeigen.

N
|
L
|
K

unverzweigt

$$H^q(L|K) := H^q(\mathrm{Gal}(L|K), L^\times)$$