Vorlesung 20

1.7.2020

<u>Wiederholung</u>

(G, A) sei eine <u>Klassenformation</u>, d.h.

I. $H^1(L|K) = 0$, $\forall\, L|K$ normal

II. Zu $L|K$ normal gibt es

$$\mathrm{inv}_{L|K} : H^2(L|K) \xrightarrow{\cong} \tfrac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$\begin{matrix} N \\ | \\ L \\ | \\ K \end{matrix}$$

mit a)

$$\begin{tikzcd}
H^2(L|K) \arrow[r, "\mathrm{inv}_{L|K}"] \arrow[d, "\mathrm{inf}_N"', "\subseteq"] & \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
H^2(N|K) \arrow[r, "\mathrm{inv}_{N|K}"] & \frac{1}{[N:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

b)

$$\begin{tikzcd}
H^2(N|K) \arrow[r, "\cong"'] \arrow[d] & \frac{1}{[N:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[d, "\cdot [L:K]"] \\
H^2(N|L) \arrow[r, "\cong"] & \frac{1}{[N:L]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{inv}_K : \quad H^2(K) = \varinjlim_{L|K} H^2(L|K) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$H^2(L|K) \ni a \longmapsto \mathrm{inv}_{L|K}(a)$$

Fundamentalklassen $u_{L|K} \in H^2(L|K)$ definiert durch

$$\mathrm{inv}_{L|K}(u_{L|K}) = \frac{1}{[L:K]} + \mathbb{Z}.$$

Es gilt: $u_{L|K} = u_{N|K}^{[N:L]}$ in

$$H^2(L|K) \underset{\inf_N}{\subseteq} H^2(N|K)$$

$$\mathrm{Res}_L(u_{N|K}) = u_{N|L} \text{ in } H^2(N|L)$$

Satz von Tate $\Longrightarrow$

$$\begin{tikzcd}
u_{L|K} \cup - : & H^{-2}(L|K,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & H^0(L|K, A_L) \arrow[d, equal] \\
& G_{L|K}^{ab} \arrow[r, "\theta_{L|K}"] & A_K / N_{L|K} A_L
\end{tikzcd}$$

Nakayamaabb.

$$\begin{tikzcd}
A_K \arrow[rr, "{(-,L|K)}"] \arrow[dr] & & G_{L|K}^{ab} \\
& A_K / N_{L|K} A_L \arrow[ur, "\theta_{L|K}^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>Satz:</u> a)

$$\begin{tikzcd}
A_K \arrow[r, "{(-,N|K)}"] \arrow[d, "="] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & G_{N|K}^{ab} \arrow[d, "\pi \text{ kanonisch}"] \\
A_K \arrow[r, "{(-,L|K)}"] & G_{L|K}^{ab}
\end{tikzcd}$$

$\left.\begin{matrix} N \\ | \\ L \\ | \\ K \end{matrix}\right)$ alles normal

(<u>Bspl:</u> $N|K$ abelsch $\quad G_{N|K} \xrightarrow{\pi} G_{L|K} = \dfrac{G_{N|K}}{G_{N|L}}$)

b)

$$\begin{array}{c} N \\ | \\ L \\ | \\ K \end{array}\Bigg)\text{normal}$$

$$\begin{tikzcd}
A_K \arrow[r, "{(-,N|K)}"] \arrow[d, "\subseteq"] & G^{ab}_{N|K} \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "\mathrm{Ver}"] & H^{-2}(N|K, \mathbb{Z}) \arrow[d, "\mathrm{Res}_L"] \\
A_L \arrow[r] & G^{ab}_{N|L} \arrow[r, phantom, "\simeq"] & H^{-2}(N|L, \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

c)

$$\begin{tikzcd}
A_L \arrow[r, "{(-,N|L)}"] \arrow[d, "N_{L|K}"] & G^{ab}_{N|L} \arrow[d, "\varkappa"] \\
A_K \arrow[r, "{(-,N|K)}"] & G^{ab}_{N|K}
\end{tikzcd}$$

wobei $\varkappa : G^{ab}_{N|L} \longrightarrow G^{ab}_{N|K}$

$$\begin{array}{ccc} G^{ab}_{N|L} & \longrightarrow & G^{ab}_{N|K} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ G_{N|L}/G'_{N|L} & & G_{N|K}/G'_{N|K} \\ \tau G'_{N|L} & \longmapsto & \tau G'_{N|K} \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{cc} N & \sigma N \\ | & | \\ K & \sigma K \end{array}$$

$\sigma \in G$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, mapsto] & A_K = A^{G_K} \arrow[r, "{(-,N|K)}"] \arrow[d, "\sigma"] & G^{ab}_{N|K} \arrow[d, "\sigma^*"] \\
\sigma a & A_{\sigma K} = A^{\sigma G_K \sigma^{-1}} \arrow[r, "{(-,\sigma N/\sigma K)}"] & G^{ab}_{\sigma N/\sigma K}
\end{tikzcd}$$

σ^* ist induziert von der Konjugation $\tau \mapsto \sigma\tau\sigma^{-1}$

ohne Beweis

<u>ZIEL:</u> Konstruktion von Klassenformationen

a) <u>In der lokalen Klassenkörpertheorie</u>

$$\begin{array}{l} k \\ | <\infty \\ \mathbb{Q}_p \end{array} \qquad G = G_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$$

Dann ist $(G, \bar{k}^\times)$ eine Klassenformation.
(Satz 5.6 in [Neu])

b) <u>In der globalen KKT</u>

$$\begin{array}{l} K \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array} \quad \text{Zahlkp.}, \quad G = G_K$$

Dann ist $(G, C_{\bar{K}})$ eine Klassenformation. Satz 6.9 bei [Neu]

$$\begin{array}{l} L \\ | <\infty \\ K \end{array}$$

Hierbei: $C_{\bar{K}} = \varinjlim_{L|K} C_L$

<u>Erinnerung:</u>

$L^\times \leq I_L := \{ (\alpha_v)_v \in \prod_v{}' L_v^\times \mid \alpha_v \in U_v$ für fast alle Stellen $v \}$

$$U_v = \begin{cases} \mathcal{O}_{L_\mathfrak{P}}^\times, & v = \mathfrak{P} \\ \mathbb{R}^\times, & v = \rho : L \hookrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbb{C}^\times & v = \sigma : L \hookrightarrow \mathbb{C},\ \sigma(L) \not\subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$

$$C_L := I_L / L^\times$$

Sei
$$\begin{array}{cc} L' & w \\ | & \\ L & v \\ | & \\ K & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I_L & \hookrightarrow & I_{L'} \\ (\alpha_v)_v & \longmapsto & (\beta_w)_w \end{array} \quad \text{mit}$$

$$\beta_w := \alpha_v \,, \text{ falls } w | v.$$

Dies induziert eine Abb.

$$C_L \hookrightarrow C_{L'}$$

<u>Bemerkung</u>: Sei $L|K$ normal. Es gilt:

$$G_{L|K}/H \text{ abelsch} \iff H \supseteq G'_{L|K}$$

$$\begin{array}{ll} L & \\ | & \Big\} \; G'_{L|K} \\ L^{ab} & \\ | & \Big\} \; G_{L|K}/G'_{L|K} = G^{ab}_{L|K} = \mathrm{Gal}(L^{ab}|K) \xrightarrow[\Theta_{L|K}]{\sim} A_K / N_{L|K} A_L \\ K & \end{array}$$

L^{ab}: max. abelsche Teilerweiterung von $L|K$

Def.: Eine Untergruppe $I \leq A_K$ heißt **Normengruppe**, wenn es eine normale Erweiterung $L|K$ gibt mit $I = N_{L|K} A_L$.

Satz: Sei $L|K$ normal und $L^{ab}|K$ die max. abelsche Teilerweiterung. Dann gilt:

$$N_{L|K} A_L = N_{L^{ab}|K} A_{L^{ab}} \subseteq A_K.$$

Beweis:

„$\subseteq$"

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ L^{ab} \\ | \\ K \end{array} \qquad N_{L|K} A_L = N_{L^{ab}|K} \underbrace{N_{L|L^{ab}} A_L}_{\subseteq A_{L^{ab}}} \subseteq N_{L^{ab}|K} A_{L^{ab}}$$

Aus dem Reziprozitätsgesetz folgt

$$A_K / N_{L|K} A_L \simeq G_{L|K}^{ab} \simeq G_{L^{ab}|K} \simeq A_K / N_{L^{ab}|K} A_{L^{ab}}$$

$\Rightarrow$ Bch. $\blacksquare$

Folgerung: $(A_K : N_{L|K} A_L) \mid [L:K] = |G_K / G_L|$ und es gilt genau dann Gleichheit, wenn $L|K$ abelsch ist.

Bew: Folgt aus

$$(A_K : N_{L|K} A_L) = (A_K : N_{L^{ab}|K} A_{L^{ab}})$$

$$= |G_{L^{ab}|K}| = [L^{ab} : K] \quad \text{teilt}$$

Reziprozitätsgesetz

$$[L:K] = [L:L^{ab}][L^{ab}:K].$$

■

SATZ: Die Zuordnung

$$L \longmapsto I_L := N_{L|K} A_L$$

liefert eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen den abelschen Erweiterungen $L|K$ und den Normenuntergruppen $I \leq A_K$.

Es gilt:

a) $I_{L_1} \supseteq I_{L_2} \iff L_1 \subseteq L_2$

b) $I_{L_1 L_2} = I_{L_1} \cap I_{L_2}$

c) $I_{L_1 \cap L_2} = I_{L_1} I_{L_2}$

Beweis: Seien L_1, L_2 abelsche Erweiterungen von K, d.h.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & L:=L_1L_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ L_1 \arrow[dr, dash] & & L_2 \arrow[dl, dash] \\ & K & \end{tikzcd}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} I_L &= N_{L|K} A_L \\ &= N_{L_i|K} N_{L|L_i} A_L \qquad i = 1,2 \\ &\subseteq N_{L_i|K} A_{L_i} = I_{L_i} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad I_L \subseteq I_{L_1} \cap I_{L_2}.$$

Sei umgekehrt $a \in I_{L_1} \cap I_{L_2}$. Dann gilt wegen

$$\begin{tikzcd} A_K \arrow[r, "{(-,L|K)}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & G_{L|K} \arrow[d, "\pi_i"] \\ A_K \arrow[r, "{(-,L_i|K)}"] & G_{L_i|K} \end{tikzcd} \qquad i = 1,2$$

$$\underset{i=1,2}{\pi_i\big((a,L|K)\big) = 1} \quad \Longrightarrow \quad (a, L|K) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad a \in I_L.$$

Damit ist b) gezeigt.

Hieraus folgt:

$$I_{L_1} \supseteq I_{L_2} \Leftrightarrow I_{L_1} \cap I_{L_2} = I_{L_2} \overset{b)}{\Leftrightarrow} I_{L_1L_2} = I_{L_2}$$

$$\Leftrightarrow [L_1L_2 : K] = [L_2 : K] \Leftrightarrow L_1L_2 = L_2 \Leftrightarrow L_1 \subseteq L_2$$

Das ist a) und es folgt die Injektivität.

Surjektivität folgt aus $N_{L|K} A_L = N_{L^{ab}|K} A_{L^{ab}}$.

<u>Zu c)</u> Z.z. $I_{L_1 \cap L_2} = I_{L_1} I_{L_2}$

$$L_1 \cap L_2 \subseteq L_i \implies I_{L_i} \subseteq I_{L_1 \cap L_2}$$
$i = 1,2$
$$\implies I_{L_1} I_{L_2} \subseteq I_{L_1 \cap L_2}$$

Betrachte

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & A_K \arrow[d, dash] & \\
 & I_{L_1 \cap L_2} \arrow[d, dash] & \\
 & I_{L_1} I_{L_2} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
I_{L_1} \arrow[dr, dash] & & I_{L_2} \arrow[dl, dash] \\
 & I_{L_1} \cap I_{L_2} \overset{b)}{=} I_{L_1 L_2} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & L_1 L_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
L_1 \arrow[dr, dash] & & L_2 \arrow[dl, dash] \\
 & L_1 \cap L_2 \arrow[d, dash] & \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

Es folgt

$$\left| A_K / I_{L_1 L_2} \right| = [L_1 L_2 : K] = \frac{[L_1 : K][L_2 : K]}{[L_1 \cap L_2 : K]}$$

$$= \frac{|A_K / I_{L_1}| \, |A_K / I_{L_2}|}{|A_K / I_{L_1 \cap L_2}|} = \frac{|A_K / I_{L_1}| \, |A_K / I_{L_1} I_{L_2}| \, |I_{L_1} I_{L_2} : I_{L_2}|}{|A_K / I_{L_1 \cap L_2}|}$$

$$= \frac{|A_K / I_{L_1} I_{L_2}| \, |A_K / I_{L_1 L_2}|}{|A_K / I_{L_1 \cap L_2}|} \implies I_{L_1 L_2} = I_{L_1 \cap L_2} \quad \blacksquare$$

Zusatz: Falls $N_{L|K}A_L \subseteq I \subseteq A_K$ für eine normale Erweiterung, so ist I eine Normengruppe.

Bew: Betrachte

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dash, "I/I_L"'] \arrow[dd, dash, bend left=60, "G_{L|K} \simeq A_K/I_L"] \\ M \arrow[d, dash] \\ K \end{tikzcd}$$

oE L/K ab., da $N_{L|K}A_L = N_{L^{ab}|K}A_{L^{ab}}$

$$\begin{array}{ccc} I/I_L & \leq & A_K/I_L \\ \cong & & \\ G_{L|M} & & \end{array}$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{ccc} G_{M|K} & \simeq & A_K/N_{M|K}A_M \\ \parallel & & \\ \dfrac{A_K/I_L}{I/I_L} & \simeq & A_K/I \end{array}$$

$\Longrightarrow I = N_{M|K}A_M$ ∎

<u>ZIEL:</u> Charakterisierung von Normengruppen durch innere Eigenschaften von A_K.

z. B. in der LKKT

$$A_K = K^\times$$

Es gilt: $I \leq K^\times$ ist Normengruppe

$\Longleftrightarrow$ I abgeschlossen und von endlichem Index.

„$\Rightarrow$" Relativ leicht

„$\Leftarrow$" Schwer („Existenz" von ab. $L|K$ mit $N_{L|K}(L^\times) = I$)