


Vorlesung 20

1.7.2020



Wiederholung

(G, A) sei eine Klassenformation, d.h.

I. $H^1(L|K) = 0$, $\forall L|K$ normal

II. Zu $L|K$ normal gibt es

$$\text{inv}_{L|K}: H^2(L|K) \xrightarrow{\cong} \frac{1}{[L:K]} \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$$

mit a) $H^2(L|K) \xrightarrow{\text{inv}_{L|K}} \frac{1}{[L:K]} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$

N
|
L
|
K

$$\text{int}_N \downarrow \subseteq \quad \cong \quad \cap$$

$$H^2(N|K) \xrightarrow{\text{inv}_{N|K}} \frac{1}{[N:K]} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$$

b) $H^2(N|K) \xrightarrow{\cong} \frac{1}{[N:K]} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$

$$\downarrow$$

$$\downarrow \cdot [L:K]$$

$$H^2(N|L) \xrightarrow{\cong} \frac{1}{[N:L]} \mathbb{Z} / \mathbb{Z}$$

$$\text{inv}_K: H^2(K) = \varinjlim_{L|K} H^2(L|K) \longrightarrow \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$$

$$H^2(L|K) \ni a \longmapsto \text{inv}_{L|K}(a)$$

Fundamentalklassen $\mu_{L|K} \in H^2(L|K)$ definiert

durch $\text{inv}_{L|K}(\mu_{L|K}) = \frac{1}{[L:K]} + \mathbb{Z}$.

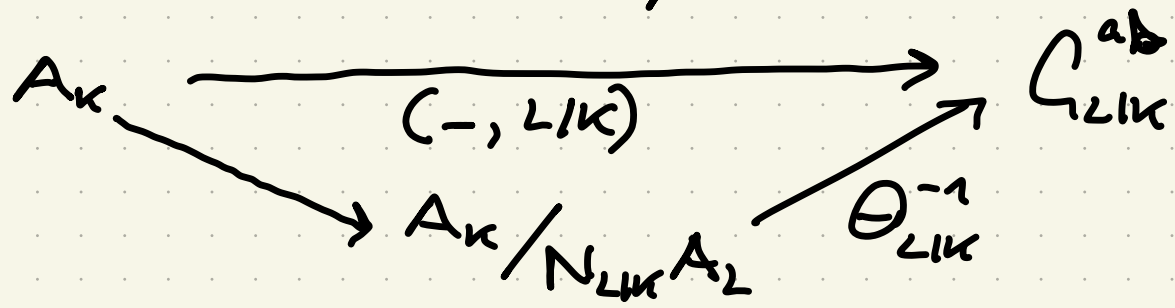
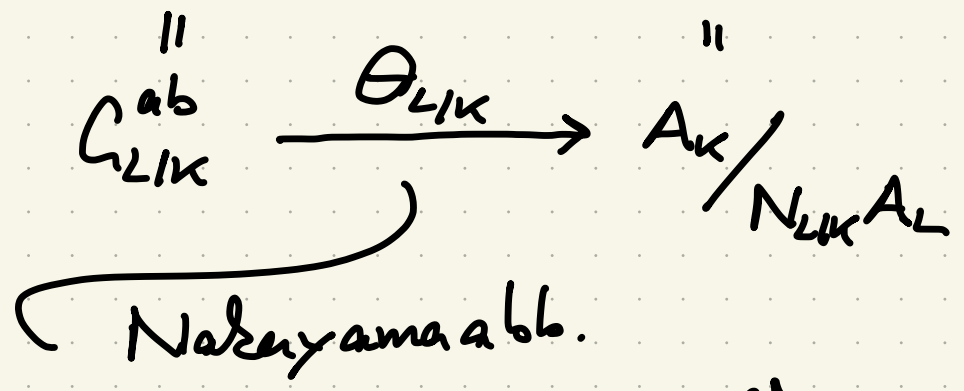
Es gilt: $\mu_{L/K} = \mu_{N/K}^{[N:L]}$ in

$$H^2(L/K) \subseteq_{\text{inf}_N} H^2(N/K)$$

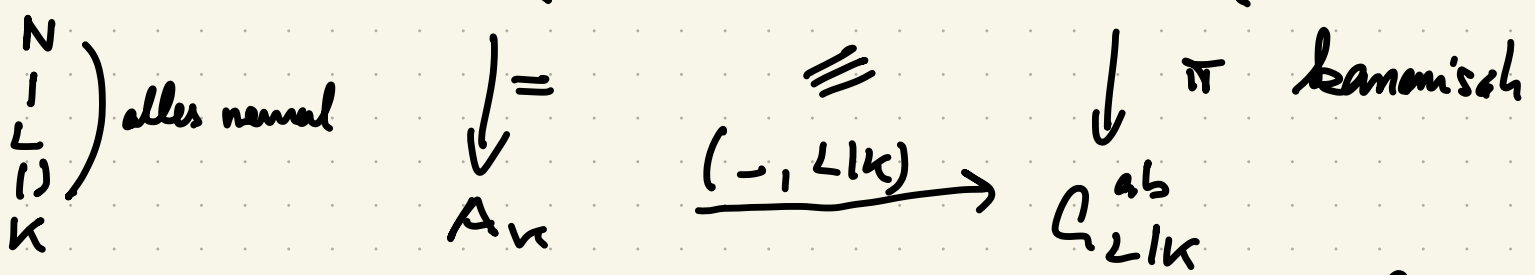
$$\text{Res}_L(\mu_{N/K}) = \mu_{N/L} \text{ in } H^2(N/L)$$

Satz von Tate \implies

$$\mu_{L/K} \cup - : H^{-2}(L/K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^0(L/K, A_L)$$



Satz: a)



(Bspl: N/K abelsch $G_{N/K} \xrightarrow{\pi} G_{L/K} = \frac{G_{N/K}}{G_{N/L}}$)

b)

$$\begin{array}{ccc}
 A_K & \xrightarrow{(-, N/K)} & \Gamma_{N/K}^{ab} \simeq H^{-2}(N/K, \mathbb{Z}) \\
 \downarrow \cong & \cong & \downarrow \text{Ver} \\
 A_L & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \Gamma_{N/L}^{ab} \simeq H^{-2}(N/L, \mathbb{Z}) \\
 & & \downarrow \text{Res}_L
 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} N \\ | \\ L \\ | \\ K \end{array} \right\} \text{normal}$

c)

$$\begin{array}{ccc}
 A_L & \xrightarrow{(-, N/L)} & \Gamma_{N/L}^{ab} \\
 \downarrow N_{L/K} & \cong & \downarrow \mathcal{K} \\
 A_K & \xrightarrow{(-, N/K)} & \Gamma_{N/K}^{ab}
 \end{array}$$

wobei $\mathcal{K}: \Gamma_{N/L}^{ab} \longrightarrow \Gamma_{N/K}^{ab}$

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma_{N/L}^{ab} & & \Gamma_{N/K}^{ab} \\
 \cong & & \cong \\
 \Gamma_{N/L} / \Gamma_{N/L}^1 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \Gamma_{N/K} / \Gamma_{N/K}^1 \\
 \cong \Gamma_{N/L}^1 & & \cong \Gamma_{N/K}^1
 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{ccc}
 A_K = A^{\sigma_K} & \xrightarrow{(-, N/K)} & \Gamma_{N/K}^{ab} \\
 \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma^* \\
 A_{\sigma K} = A^{\sigma_K \sigma^{-1}} & \xrightarrow{(-, \sigma N / \sigma K)} & \Gamma_{\sigma N / \sigma K}^{ab}
 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} N \\ | \\ \sigma N \\ | \\ K \\ | \\ \sigma K \end{array} \right\} \sigma \in G$

σ^* ist induziert von der Konjugation $\tau \mapsto \sigma \tau \sigma^{-1}$

ohne Beweis

ZIEL: Konstruktion von Klassenformationen

a) In der lokalen Klassenkörpertheorie

$$\begin{array}{l} k \\ | \\ \mathbb{Q}_p \end{array} \quad C = C_k = \text{Gal}(\bar{k}/k)$$

Dann ist (C, \bar{k}^x) eine Klassenformation.

(Satz 5.6 in [Neu])

b) In der globalen KKT

$$\begin{array}{l} K \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array} \quad \text{Zahlk.}, \quad C = C_K$$

Dann ist $(C, C_{\bar{K}})$ eine Klassenformation.

Satz 6.9
bei [Neu]

$$\begin{array}{l} L \\ | \\ K \end{array}$$

Hierbei: $C_{\bar{K}} = \varinjlim_{L|K} C_L$

Erinnerung:

$$L^x \leq I_L := \left\{ (\alpha_v)_v \in \prod_v L_v^x \mid \alpha_v \in \mathcal{U}_v \text{ für fast alle Stellen } v \right\}$$

$$\mathcal{U}_v = \begin{cases} \mathcal{O}_{L_v}^x & v = \mathfrak{p} \\ \mathbb{R}^x & v = \mathfrak{p}: L \hookrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbb{C}^x & v = \mathfrak{p}: L \hookrightarrow \mathbb{C}, \sigma(L) \not\subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$

$$C_L := I_L / L^*$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Sei } L' & \text{w} & \\ | & & \\ L & \text{v} & \\ | & & \\ K & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I_L & \hookrightarrow & I_{L'} \\ (\alpha_v)_v & \mapsto & (\beta_w)_w \quad \text{mit} \\ & & \beta_w := \alpha_w, \text{ falls w|v.} \end{array}$$

Dies induziert eine Abb.

$$C_L \hookrightarrow C_{L'}$$

Bemerkung: Sei $L|K$ normal. Es gilt:

$$G_{L|K}/H \text{ abelsch} \Leftrightarrow H \supseteq G'_{L|K}$$

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ L^{ab} \\ | \\ K \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right) G'_{L|K}$$

$$\left. \begin{array}{c} L \\ | \\ L^{ab} \\ | \\ K \end{array} \right) G_{L|K}/G'_{L|K} = G_{L|K}^{ab} = \text{Gal}(L^{ab}/K) \xrightarrow[\Theta_{L|K}]{\sim} A_K / N_{K, L} A_L$$

max. abelsche Teilweiterung von $L|K$

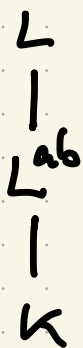
Def.: Eine Untergruppe $I \leq A_K$ heißt Normengruppe, wenn es eine normale Erweiterung L/K gibt mit $I = N_{L/K} A_L$.

Satz: Sei L/K normal und L^{ab}/K die max. abelsche Teilweiterung. Dann gilt:

$$N_{L/K} A_L = N_{L^{ab}/K} A_{L^{ab}} \subseteq A_K.$$

Beweis:

" \subseteq "



$$N_{L/K} A_L = N_{L^{ab}/K} \underbrace{N_{L/L^{ab}} A_L}_{\subseteq A_{L^{ab}}} \subseteq N_{L^{ab}/K} A_{L^{ab}}$$

Aus dem Reziprozitätsgesetz folgt

$$A_K / N_{L/K} A_L \cong G_{L/K}^{ab} \cong G_{L^{ab}/K} \cong A_K / N_{L^{ab}/K} A_{L^{ab}}$$

\Rightarrow Beh. ■

Folgerung: $(A_K : N_{L/K} A_L) \mid [L:K] = |G_K/G_L|$
und es gilt genau dann Gleichheit, wenn L/K abelsch ist.

Bew: Folgt aus

$$(A_K : N_{L|K} A_L) = (A_K : N_{L^{ab}|K} A_{L^{ab}})$$

$$\text{Reziprozitätssatz} = |G_{L^{ab}|K}| = [L^{ab}:K] \quad \underline{\text{teilt}}$$
$$[L:K] = [L:L^{ab}] [L^{ab}:K].$$

SATZ: Die Zuordnung

$$L \longmapsto I_L := N_{L|K} A_L$$

liefert eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen den abelschen Erweiterungen $L|K$ und den Normengruppen $I \leq A_K$.

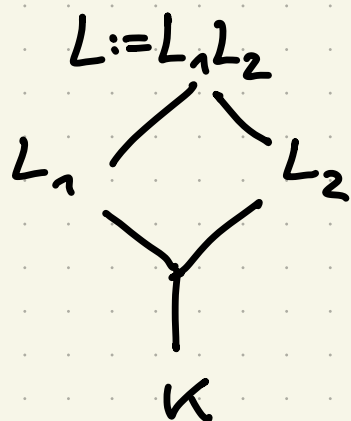
Es gilt:

- $I_{L_1} \supseteq I_{L_2} \iff L_1 \subseteq L_2$

- $I_{L_1 L_2} = I_{L_1} \cap I_{L_2}$

- $I_{L_1 \cap L_2} = I_{L_1} I_{L_2}$

Beweis: Seien L_1, L_2 abelsche Erweiterungen von K , d.h.



Dann gilt:

$$I_L = N_{L|\kappa} A_L$$

$$= N_{L_i|\kappa} N_{L|L_i} A_{L_i} \quad i=1,2$$

$$\subseteq N_{L_i|\kappa} A_{L_i} = I_{L_i}$$

$$\Rightarrow I_L \subseteq I_{L_1} \cap I_{L_2}.$$

Sei umgekehrt $a \in I_{L_1} \cap I_{L_2}$. Dann gilt wegen

$$\begin{array}{ccc}
 A_\kappa & \xrightarrow{(-, L|\kappa)} & G_{L|\kappa} \\
 \parallel & \cong & \downarrow \pi_i \quad i=1,2 \\
 A_\kappa & \xrightarrow{(-, L_i|\kappa)} & G_{L_i|\kappa}
 \end{array}$$

$$\pi_i((a, L|\kappa)) = 1 \quad \Rightarrow \quad (a, L|\kappa) = 1$$

$$\Rightarrow a \in I_L.$$

Damit ist b) gezeigt.

Hieraus folgt:

$$I_{L_1} \supseteq I_{L_2} \Leftrightarrow I_{L_1} \cap I_{L_2} = I_{L_2} \stackrel{b)}{\Leftrightarrow} I_{L_1 L_2} = I_{L_2}$$

$$\Leftrightarrow [L_1 L_2 : \kappa] = [L_2 : \kappa] \Leftrightarrow L_1 L_2 = L_2 \Leftrightarrow L_1 \subseteq L_2$$

Das ist a) und es folgt die Transitivität.

Surjektivität folgt aus $N_{L|K} A_L = N_{L^{ab}/K} A_{L^{ab}}$.

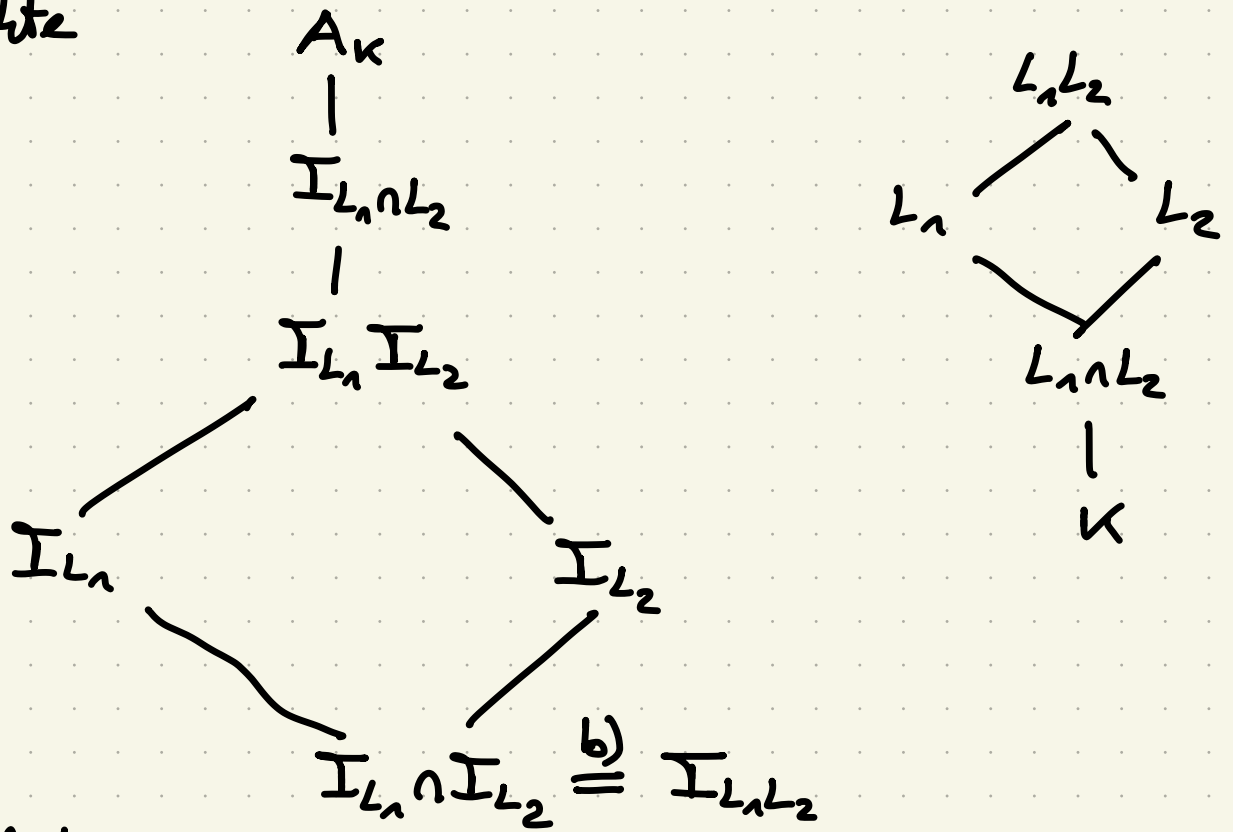
Zu c) z.z. $I_{L_1 \cap L_2} = I_{L_1} I_{L_2}$

$L_1 \cap L_2 \subseteq L_i \Rightarrow I_{L_i} \subseteq I_{L_1 \cap L_2}$

$i=1,2$

$\Rightarrow I_{L_1} I_{L_2} \subseteq I_{L_1 \cap L_2}$

Betrachte

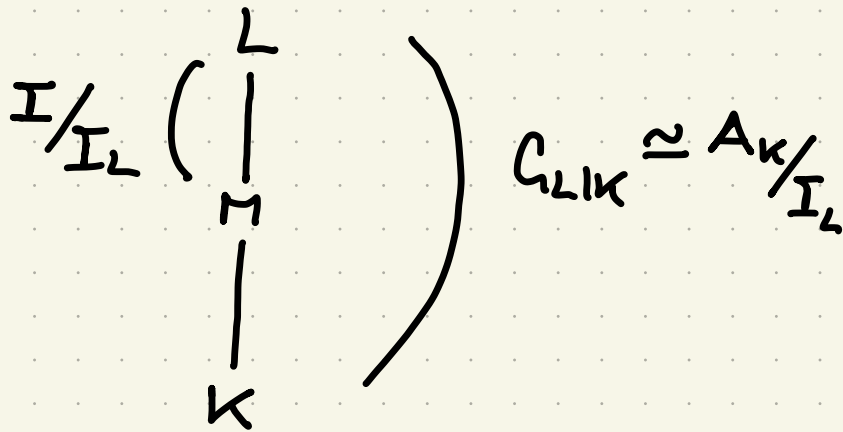


Es folgt

$$\begin{aligned}
 |A_K / I_{L_1 L_2}| &= [L_1 L_2 : K] = \frac{[L_1 : K][L_2 : K]}{[L_1 \cap L_2 : K]} \\
 &= \frac{|A_K / I_{L_1}| |A_K / I_{L_2}|}{|A_K / I_{L_1 \cap L_2}|} = \frac{|A_K / I_{L_1}| |A_K / I_{L_1 I_2}| |I_{L_1 I_2} : I_{L_1 \cap L_2}|}{|A_K / I_{L_1 \cap L_2}|} \\
 &= \frac{|A_K / I_{L_1} I_{L_2}| |A_K / I_{L_1 L_2}|}{|A_K / I_{L_1 \cap L_2}|} \Rightarrow I_{L_1 L_2} = I_{L_1 \cap L_2} \blacksquare
 \end{aligned}$$

Zusatz: Falls $N_{L/K} A_L \subseteq I \subseteq A_K$ für eine normale Erweiterung, so ist I eine Normengruppe.

Bew: Betrachte



$$G_{L/K} \cong A_K/I_L$$

$\circ \in L/K$ ab.,
 da $N_{L/K} A_L$
 \parallel
 $N_{L^{ab}/K} A_{L^{ab}}$

$$I/I_L \leq A_K/I_L$$

$$\text{is } G_{L/M}$$

Dann gilt:

$$G_{M/K} \cong A_K/N_{M/K} A_M$$

\parallel

$$\frac{A_K/I_L}{I/I_L} \cong A_K/I$$

$$\Rightarrow I = N_{M/K} A_M$$



ZIEL: Charakterisierung von Normengruppen
durch innere Eigenstruktur von A_K .

z. B. in der LKKT

$$A_K = K^*$$

Es gilt: $I \leq K^*$ ist Normengruppe

$\Leftrightarrow I$ abgeschlossen und von
endlichem Index.

" \Rightarrow " Relativ leicht

" \Leftarrow " Schwer ("Existenz" von ab.
 $L|K$ mit $N_{L|K}(L^*) = I$)