Eth II

2. Vorlesung

22.4.2020

$$\begin{array}{cc} k & \mathfrak{P} \\ | & | \\ \mathbb{Q} & p \end{array}$$

$$N\mathfrak{P} = N_{k|\mathbb{Q}}(\mathfrak{P}) = \left|\mathcal{O}_k/\mathfrak{P}\right|$$

$$N\mathfrak{a} = \left|\mathcal{O}_k/\mathfrak{a}\right|$$

$$N(\alpha\mathcal{O}_k) = \left|N_{k|\mathbb{Q}}(\alpha)\right|$$

Wiederholung

$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \mathfrak{m}_\infty$ Divisor, $\mathfrak{m}_0 \trianglelefteq \mathcal{O}_k$

$\mathfrak{m}_\infty$: quadratfreies Produkt von reellen unendlichen Stellen

$\updownarrow$

$\tau : k \hookrightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$$k^\times_\mathfrak{m} = \{\alpha \in k^\times \mid \alpha \equiv 1 \ (\mathrm{mod}^* \mathfrak{m})\}$$

$$\begin{cases} v_\mathfrak{P}(\alpha - 1) \geq v_\mathfrak{P}(\mathfrak{m}_0), & \forall \mathfrak{P} \mid \mathfrak{m}_0 \\ \sigma(\alpha) > 0, & \forall \sigma \mid \mathfrak{m}_\infty \end{cases}$$

$$P_k(\mathfrak{m}) := \{\alpha\mathcal{O}_k \mid \alpha \in k^\times_\mathfrak{m}\} \leq P_k$$

$$Cl_k(\mathfrak{m}) := I_k(\mathfrak{m}) / P_k(\mathfrak{m})$$ Strahlklassengruppe mod $\mathfrak{m}$

<u>Bem</u>:
- $Cl_k(1) = Cl_k$
- $Cl_k(\mathfrak{m}) \twoheadrightarrow Cl_k$, $\mathfrak{a}P_k(\mathfrak{m}) \mapsto \mathfrak{a}P_k$

$$\left(\mathcal{O}_k/\mathfrak{m}\right)^\times := \left(\mathcal{O}_k/\mathfrak{m}_0\right)^\times \times \underbrace{\{\pm 1\} \times \ldots \times \{\pm 1\}}_{\text{ein Faktor pro } \sigma \mid \mathfrak{m}_\infty}$$

$$\left(\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2^{-1}, \left(\operatorname{sgn}(\sigma(\alpha))\right)_{\sigma \mid \mathfrak{m}_\infty}\right)$$

$$\uparrow \varrho \qquad\qquad \uparrow$$

$$\{\alpha \in k^\times \mid (\alpha, \mathfrak{m}_0) = 1\} \qquad \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O}_k$

$\alpha_i \mathcal{O}_k + \mathfrak{m}_0 = \mathcal{O}_k$

Erinnerung an den Approximationssatz:

Gegeben:
- $| \, |_1, \ldots, | \, |_n$ paarweise inäquivalente Bewertungen von k
- $a_1, \ldots, a_n \in k$
- $\varepsilon > 0$

Dann gibt es $\alpha \in k$ mit $|\alpha - a_i|_i < \varepsilon$ für $i = 1, \ldots, n$.

Surjektivität von ϱ:

Sei $(\underbrace{\bar{a}}_{\in (\mathcal{O}_k/\mathfrak{m}_0)^\times}, (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)) \in (\mathcal{O}_k/\mathfrak{m})^\times$, d.h. $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $\mathfrak{m}_\infty = \infty_1 \cdots \infty_s$

Approximationssatz liefert $\alpha \in k^\times$ mit

$$|\alpha - a|_{\mathfrak{p}} < \varepsilon \quad \text{für } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_0$$

$$|\alpha - \varepsilon_i|_i < \varepsilon \quad \text{für } i = 1, \dots, s$$

Wähle ε klein genug, d.h. es sollte gelten $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Ferner sollte gelten:

$$\alpha \equiv a \pmod{\mathfrak{m}_0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \equiv a \pmod{\mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(\mathfrak{m}_0)}}, \quad \forall \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_0$$

$$\Leftrightarrow v_\mathfrak{p}(\alpha - a) \geq v_\mathfrak{p}(\mathfrak{m}_0), \quad \forall \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_0$$

$$\mathfrak{m}_0 = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(\mathfrak{m}_0)}$$

$$\Leftrightarrow N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(\alpha - a)} \leq N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(\mathfrak{m}_0)}$$

$$\Leftrightarrow |\alpha - a|_\mathfrak{p} \leq N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(\mathfrak{m}_0)}, \quad \forall \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_0$$

<u>Satz</u>: Die folgende Sequenz ist exakt

$$0 \to \mathcal{O}_k^\times \cap k_\mathfrak{m}^\times \longrightarrow \mathcal{O}_k^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_k/\mathfrak{m})^\times \longrightarrow cl_k(\mathfrak{m}) \to cl_k \to 0$$

$$\varsigma(\alpha) \longmapsto (\alpha) P_k(\mathfrak{m})$$

$$u \longmapsto \left(\bar{u}, (\operatorname{sgn}(\sigma(u)))_{\sigma \mid \mathfrak{m}_\infty}\right)$$

<u>Beweis</u>: Übung. $\blacksquare$

Folgerung: Es gilt: $|\mathcal{C}\ell_k(\mathfrak{m})| < \infty$

Genauer:

$$|\mathcal{C}\ell_k(\mathfrak{m})| = h_k \cdot \frac{\#(\mathcal{O}_k/\mathfrak{m})^\times}{\#\left(\mathcal{O}_k^\times / (\mathcal{O}_k^\times \cap k_{\mathfrak{m}}^\times)\right)}$$

Beweis:

$$0 \to \mathcal{O}_k^\times / \mathcal{O}_k^\times \cap k_{\mathfrak{m}}^\times \to (\mathcal{O}_k/\mathfrak{m})^\times \to \mathcal{C}\ell_k(\mathfrak{m}) \to \mathcal{C}\ell_k \to 0$$

ist exakt.

Beh: Dies ist endlich

Bew: Übung $\blacksquare$

$$\#(\mathcal{O}_k/\mathfrak{m}_0)^\times = \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_0} \varphi\left(\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}_0)}\right)$$

$\varphi(\mathfrak{a}) = \#(\mathcal{O}_k/\mathfrak{a})^\times$ Eulersche Funktion

$$\varphi(\mathfrak{p}^e) := (N\mathfrak{p} - 1) N\mathfrak{p}^{e-1}$$

ZIEL: Definition der Artinabbildung

Erinnerung an Frobeniuselemente:

$$\begin{array}{ccccc} K & \supseteq & \mathcal{O}_K & \supseteq & \mathfrak{P} \\ G \big(\Big| & & | & & | \\ k & \supseteq & \mathcal{O}_k & \supseteq & \mathfrak{p} \end{array}$$

Zahlkp.

$$\overline{K} = \kappa(\mathfrak{P}) := \mathcal{O}_K / \mathfrak{P}$$

$$\Big| \Big) f = f(\mathfrak{P} | \mathfrak{p})$$

$$\overline{k} = \kappa(\mathfrak{p}) := \mathcal{O}_k / \mathfrak{p}$$

$\overline{K} / \overline{k}$ ist zyklische Galoiserweiterung vom Grad f. $\mathrm{Gal}(\overline{K} | \overline{k}) = \langle \varphi \rangle$,

φ = Frobenius, wobei

$$\varphi(x) = x^q, \quad \forall x \in \overline{K}$$

wobei $q = |\overline{k}| = N\mathfrak{p} = N_{k|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})$.

Sei $Z = Z(\mathfrak{P} | \mathfrak{p}) := \{ \sigma \in G \mid \sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P} \}$ die Zerlegungsgruppe.

Sei $T = T(\mathfrak{P} | \mathfrak{p}) := \{ \sigma \in Z \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{P}}, \ \forall \alpha \in \mathcal{O}_K \}$ die Verzweigungsgruppe.

Die Sequenz

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow Z \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\kappa}|\overline{k}) \longrightarrow 0$$

$$\sigma \longmapsto \left(\overline{\alpha} \overset{\overline{\sigma}}{\longmapsto} \overline{\sigma(\alpha)}\right)$$

ist exakt. $\qquad \overline{\alpha} \in \mathcal{O}_K/\mathfrak{P} = \overline{\kappa}$

<u>Bekannt:</u> $\quad |T(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})| = e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})$

<u>Also:</u> $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ ist unverzweigt

$$\iff T(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) = 1$$

$$\iff Z \simeq \underset{\langle \varphi \rangle}{\underset{\parallel}{\mathrm{Gal}(\overline{\kappa}|\overline{k})}}$$

Sei $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ unverzweigt.

$$\sigma_{\mathfrak{P}} \longmapsto \varphi$$

Also gibt es einen (globalen) Frobenius $\sigma_{\mathfrak{P}}$ mit $\sigma_{\mathfrak{P}} \in Z \subseteq G$. $\sigma_{\mathfrak{P}}$ ist eindeutig bestimmt durch

$$\sigma_{\mathfrak{P}}(\alpha) \equiv \alpha^{N\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{P}}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}_K$$

$$\begin{array}{ccc} K & & \mathfrak{P} \quad \mathfrak{P}' \\ G\Big(\Big| & & \diagdown \quad \diagup \\ k & & \mathfrak{p} \end{array}$$

Dann gibt es $\tau \in G$ mit $\tau(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}'$

Es gilt:

$$Z(\mathfrak{P}'|\mathfrak{p}) = \tau \, Z(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) \, \tau^{-1}$$

$$T(\mathfrak{P}'|\mathfrak{p}) = \tau \, T(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) \, \tau^{-1}$$

Weiter gilt:

$$\sigma_{\mathfrak{P}}\left(\tau^{-1}(\alpha)\right) \equiv \tau^{-1}(\alpha)^{N\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{P}}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}_K$$

$$\Leftrightarrow \left(\tau \sigma_{\mathfrak{P}} \tau^{-1}\right)(\alpha) \equiv \alpha^{N\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{P}'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{\mathfrak{P}'} = \tau \sigma_{\mathfrak{P}} \tau^{-1}}$$

Falls $K|k$ abelsch ist, so ist $\sigma_{\mathfrak{P}'} = \sigma_{\mathfrak{P}}$ und wir schreiben $\sigma_{\mathfrak{p}} = \sigma_{\mathfrak{P}} = \sigma_{\mathfrak{P}'}$.

Definition (Artinabbildung)

Sei $K|k$ abelsch. Dann induziert

$$\mathfrak{p} \longmapsto \sigma_{\mathfrak{p}}$$

einen Homomorphismus

$$I_k(\mathfrak{d}_{K|k}) \longrightarrow Gal(K|k)$$
$$\mathfrak{a} \longmapsto (\mathfrak{a}, K|k) = \sigma_{\mathfrak{a}}$$

durch multiplikative Fortsetzung.

Erläuterung:

- $\mathfrak{p} \in I_k(\mathfrak{d}_{K|k}) \implies \mathfrak{p}$ unverzweigt in $K|k$

  Relativdiskriminante

- Explizit: Falls $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})}$

  $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \in \mathbb{Z}$, fast alle gleich 0

  so ist

$$(\mathfrak{a}, K|k) = \prod_{\mathfrak{p}} \sigma_{\mathfrak{p}}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})}$$

Dies ist wohldefiniert, weil $I_k(\mathfrak{f})$, $\mathfrak{f} \trianglelefteq \mathcal{O}_k$, frei erzeugt ist von den Primidealen $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$.

<u>SATZ 1:</u> Sei $K|k$ abelsch. Dann gibt es einen Divisor $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 \mathfrak{f}_\infty$ von k mit:

(1) $\mathfrak{p}$ ist verzweigt in $K|k$

$$\Leftrightarrow \quad \mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}$$

(2) Zu jedem Divisor $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{f} \mid \mathfrak{m}$ gibt es eine eindeutige Untergruppe H von $I_k(\mathfrak{m})$ mit $P_k(\mathfrak{m}) \leq H$, so daß

$$\begin{aligned} I_k(\mathfrak{m})/H &\longrightarrow \mathrm{Gal}(K|k) \\ \mathfrak{a}H &\longmapsto (\mathfrak{a}, K|k) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Genauer gilt:

$$H = P_k(\mathfrak{m}) \cdot N_{K|k}(I_K(\mathfrak{m}_0 \mathcal{O}_K))$$

Erläuterungen:

1) Wann ist $\tau : k \longrightarrow \mathbb{C}$ verzweigt?

Es gilt:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[drr, hook, "\hat{\tau}"] & & \\ & & \mathbb{C} \\ k \arrow[urr, hook, "\tau"'] \arrow[u, dash] & & \end{tikzcd}$$

$\hat{\tau}$ definiert Stelle über τ, falls $\hat{\tau}|_k = \tau$.

<u>Def.:</u> τ heißt verzweigt

$:\Longleftrightarrow$ τ reell & $\hat{\tau}$ komplex.

<u>Definition:</u>

(1) Es gibt ein minimales $\mathfrak{f}$ mit den Eigenschaften in Satz 1. Dieses heißt <u>Führer</u> oder <u>Konduktor</u> von $K|k$. Man schreibt: $\mathfrak{f}_{K|k} = \mathfrak{f}(K|k)$.

(2) Jedes $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{f}_{K|k} \mid \mathfrak{m}$ nennt man <u>Erklärungsmodul</u> von $K|k$.

SATZ 2 (Existenzsatz)

Sei $\mathfrak{m}$ ein Divisor von k und $H \leq I_k(\mathfrak{m})$ mit $P_k(\mathfrak{m}) \leq H$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte abelsche Erweiterung $K|k$ mit:

(1) Falls $\mathfrak{p}$ in $K|k$ verzweigt, so folgt $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}$.

(2) Es gilt

$$H = P_k(\mathfrak{m}) \cdot N_{K|k}\left(I_K(\mathfrak{m}\mathcal{O}_K)\right)$$

und

$$\begin{aligned} I_k(\mathfrak{m})/H &\xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Gal}(K|k) \\ \mathfrak{a}H &\longmapsto (\mathfrak{a}, K|k) \end{aligned}$$

ist ein Iso. (mit anderen Worten:

$$I_k(\mathfrak{m}) \to \mathrm{Gal}(K|k),\ \mathfrak{a} \mapsto (\mathfrak{a}, K|k),$$

ist surjektiv und hat Kern H.)