Vorlesung 19

29.6.2020

Wiederholung

(G, A) Formation   Bspl: $G = Gal(\bar{k}|k)$

$A = \bar{k}^\times$

Für einen Körper (Index) $K \in X$ setzt man

$$A_K := A^{G_K}$$

Für L/K normal, ist A_L ein $G_{L|K} := G_K/G_L$-Modul

Def: $H^q(L|K) = H^q(L|K, A_L) = H^q(G_{L|K}, A_L)$

$$\left.\begin{matrix} N \\ | \\ L \\ | \\ K \end{matrix}\right) \text{alles normal} \rightsquigarrow H^q(L|K) \xrightarrow{\mathrm{Inf}_N} H^q(N|K)$$

$q \geq 1$

ist eine Einbettung, falls $H^1(N|L) = 0$

für $q = 2$

Def.: Dann heißt (G, A) eine Körperformation.

Bspl: $(Gal(\bar{k}|k), \bar{k}^\times)$ ist eine Körperformation

(HS 90)

Def: $H^2(K) = H^2(K, A) = H^2(G, A) := \varinjlim\limits_{L|K \text{ normal}} H^2(L|K, A_L$

Satz:

$$0 \longrightarrow H^2(K'|K) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^2(K) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^2(K')$$

ist exakt.

$$\begin{array}{l} L \\ | \\ K' \\ | \\ K \end{array} \Big) \text{ normal}$$

ZIEL:

$$\begin{array}{ccc} G_{L|K}^{ab} & \xrightarrow[\simeq]{\hspace{3em}} & A_K / N_{L|K} A_L \\ \| & & \| \\ H^{-2}(L|K, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{a \cup -} & H^0(L|K, A_L) \end{array}$$

$a \in$ Erzeuger von $H^2(L|K, A_L)$

Brauchen dazu:

I. $H^1(L|K) = 0$, $\forall$ $L|K$ normal

II. $H^2(L|K)$ zyklisch von der Ordnung $[L:K]$

Lege nun a "kompatibel" fest.

Dazu formulieren wir eine Verschärfung von II.

Def.: Eine Formation wird eine <u>Klassenformation</u> genannt, falls gilt:

I. $H^1(L|K) = 0$ für alle normalen $L|K$
(d.h. (G, A) ist eine Körperformation)

II. Zu jeder normalen Erweiterung $L|K$ gibt es einen Isomorphismus

$$\mathrm{inv}_{L|K} : H^2(L|K) \xrightarrow{\ \cong\ } \tfrac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) $\left.\begin{array}{c} N \\ | \\ L \\ | \\ K \end{array}\right)$ alles normal

$$\begin{tikzcd}
H^2(L|K) \arrow[r, "\mathrm{inv}_{L|K}"] \arrow[d, "\mathrm{inf}_N"', "``\subseteq\text{''}"] \arrow[dr, phantom, "///"] & \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[d, "\subseteq"] \\
H^2(N|K) \arrow[r, "\mathrm{inv}_{N|K}"] & \frac{1}{[N:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

"d.h. $\mathrm{inv}_{L|K} = \mathrm{inv}_{N|K}\big|_{H^2(L|K)}$"

b)

$$\left.\begin{array}{c} N \\ | \\ L \\ | \\ K \end{array}\right) \text{normal}$$

$$\begin{tikzcd} H^2(N|K) \arrow[r, "\mathrm{inv}_{N|K}"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_L"] & \frac{1}{[N:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[d, "\cdot [L:K]"] \\ H^2(N|L) \arrow[r, "\mathrm{inv}_{N|L}"] & \frac{1}{[N:L]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

<u>Bem:</u> Dies legt kompatible Erzeuger fest, nämlich

$$\pm \frac{1}{[L:K]} + \mathbb{Z} \quad \text{in } \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

<u>Beob:</u> Aufgrund von a) erhalten wir einen injektiven Homom.

$$\begin{aligned} \mathrm{inv}_K : \quad H^2(K) &\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ a &\longmapsto \mathrm{inv}_{L|K}(a), \quad \text{falls} \\ &\qquad a \in H^2(L|K) \end{aligned}$$

<u>Satz:</u> Sei $N|L|K$ und $N|K$ normal. Dann gilt:

a) $\mathrm{inv}_{N|K}(c) = \mathrm{inv}_{L|K}(c)$, falls $L|K$ ebenfalls normal ist und $c \in H^2(L|K) \subseteq H^2(N|K)$.

b) $\mathrm{inv}_{N|L}(\mathrm{Res}_L(c)) = [L:K]\, \mathrm{inv}_{N|K}(c)$ für $c \in H^2(N|K)$

c) $\mathrm{inv}_{N|K}\left(\mathrm{Kor}_K(c)\right) = \mathrm{inv}_{N|L}(c)$, $\quad c \in H^2(N|L)$

d) $\mathrm{inv}_{N|K}(c) = \mathrm{inv}_{\sigma N|\sigma K}(\sigma^* c)$, $\quad c \in H^2(N|K)$
$\sigma \in G$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, dash] \arrow[d, bend right=60, "\text{normal}"'] & & \sigma N \arrow[d, dash] \\ K \arrow[rr, squiggly, phantom] & & \sigma K \end{tikzcd}$$

$$G_{N|K} = G_K / G_N \xrightarrow[\simeq]{c_\sigma} G_{\sigma K} / G_{\sigma N}$$

$$\tau G_N \longmapsto \sigma \tau \sigma^{-1} \cdot G_{\sigma N}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} G_{\sigma K} = \sigma G_K \sigma^{-1} \\ \triangledown\!| \\ G_{\sigma N} = \sigma G_N \sigma^{-1} \end{array}}$$

$$A = A^{G_N} \xrightarrow[\simeq]{m_\sigma} A_{\sigma N} = A^{\sigma G_N \sigma^{-1}}$$
$$a \longmapsto \sigma a$$

Wegen $m_\sigma(\gamma \cdot a) = c_\sigma(\gamma)\left(m_\sigma(a)\right)$, $\quad \gamma \in G_{N|K}$, $a \in A_N$

$$\begin{tikzcd} G^q_{N|K} \arrow[r, "x"] & A_N \arrow[d, "m_\sigma"] \\ G^q_{\sigma N|\sigma K} \arrow[u, "c_\sigma^{-1}"] \arrow[r, dashed, "\sigma^* x"] & A_{\sigma N} \end{tikzcd}$$

induziert

$$H^2(N|L) \xrightarrow{\sigma^*} H^2(\sigma N|\sigma L)$$

Beweis von c) Wegen II. b)

$$\begin{tikzcd} \tilde{c} \in H^2(N|K) \arrow[r, "\mathrm{inv}_{N|K}", "\simeq"'] \arrow[d, two heads, "\mathrm{Res}_L"] & \frac{1}{[N:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[d, two heads, "\cdot [L:K]"] \\ c \in H^2(N|L) \arrow[r, "\simeq", "\mathrm{inv}_{N|L}"'] & \frac{1}{[N:L]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \end{tikzcd} \qquad \begin{matrix} N \\ | \\ L \\ | \\ K \end{matrix}$$

ist Res_L surjectiv.

Dann folgt: $\mathrm{Kor}_K(c) = \mathrm{Kor}_K(\mathrm{Res}_L(\tilde{c}))$

$$= \tilde{c}^{[L:K]}$$

$$\Rightarrow \mathrm{inv}_{N|K}(\mathrm{Kor}_K(c)) = \mathrm{inv}_{N|K}(\tilde{c}^{[L:K]})$$

$$= [L:K]\,\mathrm{inv}_{N|K}(\tilde{c}) \overset{b)}{=} \mathrm{inv}_{N|L}(c)$$

d) Siehe [Neu].

a) und b) sind aus der Def. einer Klassenformation.

$\blacksquare$

<u>Definition der Fundamentalklasse:</u> Das durch

$$\mathrm{inv}_{L|K}(u_{L|K}) = \frac{1}{[L:K]} + \mathbb{Z}$$

eindeutig bestimmte Element $u_{L|K} \in H^2(L|K)$ heißt <u>Fundamentalklasse</u>.

Formale Konsequenzen des letzen Satzes.

<u>**Satz:**</u> Sei $N|L|K$ und $N|K$ normal. Dann gilt:

a) $u_{L|K} = u_{N|K}^{[N:L]}$, falls $L|K$ normal ist

b) $\mathrm{Res}_L(u_{N|K}) = u_{N|L}$

c) $\mathrm{Kor}_K(u_{N|L}) = u_{N|K}^{[L:K]}$

d) $\sigma^*(u_{N|K}) = u_{\sigma N|\sigma K}$, $\forall \sigma \in G$.

<u>Beweis (Kostprobe)</u>

a) $\mathrm{inv}_{N|K}(u_{N|K}^{[N:L]}) = [N:L]\, \mathrm{inv}_{N|K}(u_{N|K})$

$$= \frac{[N:L]}{[N:K]} + \mathbb{Z} = \frac{1}{[L:K]} + \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{c} N \\ | \\ L \\ | \\ K \end{array}$$

$$= \mathrm{inv}_{L|K}(u_{L|K})$$

$$= \mathrm{inv}_{N|K}(u_{L|K})$$

$\Rightarrow u_{N|K}^{[N:L]} = u_{L|K}$ in

$$H^2(L|K) \xhookrightarrow{\mathrm{inf}_N} H^2(N|K)$$

$\blacksquare$

HAUPTSATZ ÜBER KLASSENFORMATIONEN

Sei (G, A) eine Klassenformation. Dann ist für jede normale Erweiterung $L|K$ die Abb.

$$u_{L|K} \cup \_ : H^q(L|K, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{q+2}(L|K),$$

$$q \in \mathbb{Z}$$

ein Isomorphismus.

<u>Beweis:</u> Satz von Tate. $\blacksquare$

Im Fall $q = -2$ erhalten wir das allgemeine Reziprozitätsgesetz

<u>Satz:</u> Sei (G, A) eine Klassenformation. Dann liefert für jede normale Erweiterung $L|K$ die Abb.

$$u_{L|K} \cup \_ : H^{-2}(L|K, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(L|K)$$

eine Isomorphismus

$$\Theta_{L|K} : G_{L|K}^{ab} \xrightarrow{\sim} A_K / N_{L|K}(A_L)$$

$\blacksquare$

Def.: $\Theta_{L|K}$ heißt Nakayamaabbildung, die dazu inverse Abb. heißt Reziprozitätsisomorphismus.

Das Normrestsymbol

$$\begin{tikzcd} A_K \arrow[rr, "{(-,L|K)}"] \arrow[dr] & & G_{L|K}^{ab} \\ & A_K / N_{L|K} A_L \arrow[ur, "\Theta_{L|K}^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

ist die davon induzierte Abb.

Bemerkung:

$$0 \to N_{L|K} A_L \longrightarrow A_K \xrightarrow{(-,L|K)} G_{L|K}^{ab} \longrightarrow 0$$

ist exakt

M. a. W.: für alle $a \in A_L$ gilt:

$$(a, L|K) = 1 \iff a \in N_{L|K} A_L$$

Satz: Sei $N|L|K$ und $N|K$ normal. Dann sind folgende Diagramme kommutativ:

a)
$$\begin{tikzcd}
A_K \arrow[r, "{(-,N|K)}"] \arrow[d, "="] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & G^{ab}_{N|K} \arrow[d, "\pi"] \\
A_K \arrow[r, "{(-,L|K)}"] & G^{ab}_{L|K}
\end{tikzcd}$$

falls $L|K$ normal ist

wobei
$$\pi : G^{ab}_{N|K} \longrightarrow G^{ab}_{L|K}$$
$$G^{ab}_{N|K} = G_{N|K}/G'_{N|K}, \qquad G^{ab}_{L|K} = \frac{(G_{N|K}/G_{N|L})}{(G_{N|K}/G_{N|L})'}$$
$$\sigma G'_{N|K} \longmapsto (\sigma G_{N|L}) \cdot (G_{N|K}/G'_{N|L})$$

b)
$$\begin{tikzcd}
A_K \arrow[r, "{(-,N|K)}"] \arrow[d, "\subseteq"] & G^{ab}_{N|K} \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, dashed, "\mathrm{Ver}"] & H^{-2}(N|K,\mathbb{Z}) \arrow[d, "\mathrm{Res}_L"] \\
A_L \arrow[r, "{(-,L|K)}"] & G^{ab}_{N|L} \arrow[r, phantom, "\simeq"] & H^{-2}(N|L,\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Bemerkung: Für Ver(lagerung) hat man eine rein gruppentheoretische Beschreibung, siehe [Neu, AlgZth., IV, §5, S. 312]

<u>ZIEL:</u> $k/\mathbb{Q}_p$, $G = G_k$

$(G_k, \bar{k}^\times)$ ist eine Klassenformation

(Satz (5.6) bei [Neu])