Vorlesung 18

24.6.20

Wiederholung:

$$\Omega = \bar{k} \quad \text{sep. Abschluß}$$

$$\Big|\ \Big)\text{gal.}, \quad G_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}|k) \text{ ist eine top. Gruppe}$$

k

Eine Umgebungsbasis der 1 ist gegeben durch die offenen Normalteiler

$$G(\bar{k}/K), \quad K|k \text{ endl. gal.}$$

G_k wird zu einer hausdorffschen und kompakten Gruppe. Es gilt:

$$G_k \cong \varprojlim_{K|k} \mathrm{Gal}(K|k)$$

Ab jetzt: G top. hausdorffsche Gruppe
kompakt
Umgebungsbasis der 1
bestehend aus offenen NT

$\Big\}$ pro-endlich

Wir indizieren die Menge der offenen U'gr von G mit X und nennen die Indizes Körper.

Die benutzen Sprechweisen/Notationen, die motiviert sind vom Hauptsatz der Galoistheorie.

z. B.: falls $G_L \subseteq G_K$, so schreibt man

$$L/K \quad \text{bzw.} \quad K \subseteq L$$

$$\begin{array}{c} \bar{k} \\ | \\ L \\ | \\ K \\ | \\ k \end{array}$$

Falls $G_L \lhd G_K$, so nennen wir L/K normal und setzen:

$$G_{L|K} := G_K / G_L$$

Aber: Wir sind in der Gruppentheorie bzw. Modultheorie

Ab jetzt: G pro-endlich

A stetiger G-Modul

Def: (G, A) heißt Formation.

$$\forall a \in A \text{ ist } G_a := \{\sigma \in G \mid \sigma a = a\} \underbrace{\leq G}_{\text{offen}}$$

Bspl.: $A = \bar{k}^\times$

z.z. A ist stetig

<u>Dazu:</u> Sei $a \in A = \bar{k}^\times \Rightarrow G_a = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k(a))$

$$\begin{tikzcd}
\bar{k} \arrow[d, dash] \\
K \arrow[d, dash] \\
k(a) \arrow[d, dash] \\
k \arrow[uu, bend left, dash, "\mathrm{gal}"] \arrow[uuu, bend right, dash, "G = G_k"']
\end{tikzcd}$$

Sei $K \mid k(a) \mid k$ der galoissche Abschluss von $k(a)/k$

Es gilt:

$$G_a = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k(a)) = \dot{\bigcup_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k(a))/\mathrm{Gal}(\bar{k}|K)}} \sigma\, \mathrm{Gal}(\bar{k}|K)$$

ist offen. ∎

Sei (G, A) eine Formation.

<u>Def.:</u> Für $K \in X$ setzt man $A_K := A^{G_K}$.

<u>Im Standardbeispiel:</u> $A_K = K^\times$

<u>Bemerkungen:</u> a) $K \subseteq L \Leftrightarrow G_L \subseteq G_K \Rightarrow A_K \subseteq A_L$

$L|K \Leftrightarrow$

b) $L|K$ normal $\Leftrightarrow G_L \trianglelefteq G_K \Rightarrow A_L = A^{G_L}$ ist ein ein $G_K/G_L = G_{L|K}$ - Modul.

Zu jeder normalen Erweiterung $L|K$ haben wir Kohomologiegruppen

$$H^q(G_{L|K}, A_L)$$

Def.: $$H^q(L|K) = H^q(L|K, A_L) := H^q(G_{L|K}, A_L) = H^q(G_K/G_L, A^{G_L})$$

Weitere Notation:

$$\begin{array}{l} N \\ | \\ L \\ | \\ K \end{array} \quad L|K \text{ normal}, \quad N|K \text{ normal}$$

Dann haben wir Inflationsabb.

$q \geq 1$

$$\begin{tikzcd}
H^q(L|K) \arrow[r, "\mathrm{Inf}_N"] \arrow[d, equal] & H^q(N|K) \arrow[d, equal] \\
H^q(G_{L|K}, A_L) \arrow[d, equal] & H^q(G_K/G_N, A^{G_N}) \arrow[d, equal] \\
H^q(G_K/G_L, A_N^{G_L}) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] & H^q(G_K/G_N, A_N)
\end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{c} N \\ | \\ L \\ | \\ K \end{array}\right] \text{normal} \qquad \begin{array}{l} H^q(N|K) \xrightarrow{\mathrm{Res}_L} H^q(N|L) \\ H^q(N|L) \xrightarrow{\mathrm{Kor}_K} H^q(N|K) \end{array}$$

Falls $N|K$ und $L|K$ normal sind, so ist

$$0 \to H^q(L|K) \xrightarrow{\mathrm{Inf}_N} H^q(N|K) \xrightarrow{\mathrm{Res}_L} H^q(N|L)$$

exakt für $q \geq 1$ falls

$$H^i(N|L) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, q-1.$$

<u>Bspl:</u> $A = \bar{k}^\times$, $G = G_k$

$$\begin{array}{ccc} H^0(N|K) = K^\times / N_{N|K}(N^\times) & \xrightarrow{\mathrm{Res}_L} & H^0(N|L) \\ & & \| \\ & & L^\times / N_{N|L}(N^\times) \end{array}$$

ist induziert von $K^\times \subseteq L^\times$.

$\xleftarrow{\mathrm{Kor}_K}$

ist induziert von $N_{L|K}$.

Def.: Die Formation (G, A) heißt <u>Körperformation</u>, falls für jede normale Erweiterung $L|K$ die erste Kohomologiegruppe $H^1(L|K) = H^1(G_{L|K}, A_L)$ trivial ist.

Beispiel:

Satz: Sei Ω / k galoissch und $A = \Omega^\times$. Dann ist $(Gal(\Omega/k), \Omega^\times)$ eine Körperformation.

Beweis: $A_L = L^\times$. Also ist zu zeigen: $H^1(Gal(L/K), L^\times) = 0$ für alle

$$\begin{array}{l} \Omega \\ | \\ L \\ | \; \left.\right] \text{gal.} \\ K \\ | \\ k \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l}L\\|\\K\\|\\k\end{array}}\right] < \infty$$

Das ist HS 90 (Bew. in Ü.) $\blacksquare$

Bemerkung: ZTh I gezeigt:

$L|K$ mit $\langle\sigma\rangle$: Sei $\alpha \in L^\times$. Dann gilt:

$$N_{L|K}(\alpha) = 1 \iff \exists \beta \in L^\times : \alpha = \beta^\sigma / \beta$$

Mit anderen Worten:

$$H^{-1}(Gal(L|K), L^\times) = 0$$

Im zyklischen gilt:

$$H^{-1}(Gal(L|K), L^\times) \simeq H^1(Gal(L|K), L^\times)$$

<u>Bemerkung:</u> In einer Körperformation (G, A) ist die Inflations-Restriktions-Sequenz exakt in Dimension 2, d.h.

$$0 \to H^2(L|K) \xrightarrow{Inf_N} H^2(N|K) \xrightarrow{Res_L} H^2(N|L)$$

ist exakt.

$$\begin{array}{c} N \\ | \\ L \\ | \\ K \end{array} \quad \text{normal}$$

<u>Def.:</u>

$$H^2(K) = H^2(K, A) = H^2(G, A)$$
$$:= \varinjlim_{L} H^2(L|K)$$

wobei L die normalen Erweiterungen von K durchläuft und

$$H^2(L|K) \xhookrightarrow{Inf_N} H^2(N|K)$$

__Anschaulich:__ $H^2(K) = \bigcup\limits_L H^2(L|K)$,

wenn man sich die Inflation als Identität vorstellt, d.h. $H^2(L|K) \subseteq H^2(N|K)$ bedeutet eigentlich $\inf_N(H^2(L|K)) \subseteq H^2(N|K)$

__Formal:__

$$H^2(K) = \varinjlim_L H^2(L|K) = \dot{\bigcup_L} H^2(L|K) \Big/ \sim$$

wobei $(a_1, L_1) \sim (a_2, L_2)$

d.h. $a_1 \in H^2(L_1/K)$ $\qquad$ $a_2 \in H^2(L_2|K)$

falls es L/L_1, L/L_2 gibt mit

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & L \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ L_1 \arrow[dr, dash] & & L_2 \arrow[dl, dash] \\ & K & \end{tikzcd}$$

$\inf_L(a_1) = \inf_L(a_2)$

in $H^2(L/K)$

__Bemerkung.__ Für pro-endliche Gruppen G und stetige G-Moduln A kann man wie bei endlichen Gruppen für $q \geq 0$

Kohomologiegruppen $H^q(G, A)$ definieren, indem man als q-Koketten nur stetige Abb.

$$x : G^q \longrightarrow A \qquad q \geq 1$$

zuläßt.

Es gilt dann:

$$H^q(G, A) \simeq \varinjlim_{U} \underbrace{H^q(G/U, A^U)}_{\text{definiert wie bei uns}}$$

$$G = \varprojlim_{\substack{U \trianglelefteq G \\ \text{offen}}} \underbrace{G/U}_{\text{endliche Gruppen}}$$

(Literatur: Neukirch / Schmidt / Wingberg Th. 1.5.1)

<u>Satz:</u> Sei (G, A) eine Körperformation und $K'|K$ normal. Dann ist

$$0 \longrightarrow H^2(K'|K) \xrightarrow{\text{Inf}} H^2(K) \xrightarrow{\text{Res}} H^2(K')$$

$$a \longmapsto (a, K')$$

$$(c, L) \longmapsto (\text{Res}(c), L)$$

exakt

$$\begin{array}{c} \Omega \\ | \\ K' \\ | \\ K \\ | \\ k \end{array} \Big] \text{ normal}$$

o.E. $L|K'$ $\qquad c \in H^2(L|K) \xrightarrow{\text{Res}} H^2(L|K')$

Wohldefiniertheit: Übung

Beweis: Sei $c \in H^2(L|K) \subseteq H^2(K)$, $L|K$ normal, und es gelte $\mathrm{Res}_{K'}(c) = 0$ in $H^2(L|K') \subseteq H^2(K')$. Dann folgt die Exaktheit bei $H^2(K)$ aus der Inflations-Restriktionssequenz von $L|K'|K$. ∎

ZIEL: Finde $G_{L|K}^{ab} \xrightarrow{\sim} A_K / N_{L|K} A_L$

Dies liefert der Satz von Tate, falls

I. $H^1(L|K) = 1$

II. $H^2(L|K)$ zyklisch von Ordnung $[L:K] = |G_K/G_L|$.

Dann:

$$H^{-2}(G_{L|K}, \mathbb{Z}) \xrightarrow[\simeq]{a \cup -} H^0(G_{L|K}, A_L) = A_K / N_{L|K} A_L$$

$a \in H^2(L|K)$ ein Erzeuger

Man will nun a eindeutig festlegen.