Beispiel: Sei $k = \mathbb{F}_q$, $\Omega = \overline{k}$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, dash] & \Omega = \overline{\mathbb{F}_q} \\
K \arrow[d, dash, "n"] & \\
\mathbb{F}_q \arrow[uu, bend right, dash, "m"'] &
\end{tikzcd}
\qquad G \ni \varphi \quad \text{Frobenius}$$

$\alpha \in \Omega$

$\varphi(\alpha) = \alpha^q$

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathrm{Gal}(N/\mathbb{F}_q) \xrightarrow{res} \mathrm{Gal}(K|\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$1 + m\mathbb{Z} \mapsto \varphi|_N \mapsto \varphi|_K \leftarrow 1 + n\mathbb{Z}$$

$$G \simeq \varprojlim_K \mathrm{Gal}(K|\mathbb{F}_q) \simeq \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} =: \hat{\mathbb{Z}}$$

Prüfering

VH

$$\langle \varphi \rangle \simeq \mathbb{Z} \subsetneq$$

$$a \mapsto (a + n\mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}$$

Es gilt: $\overline{\mathbb{F}_q}^G = \mathbb{F}_q = \overline{\mathbb{F}_q}^{\langle \varphi \rangle}$

Übung: a) $\langle \varphi \rangle \subsetneq G$. b) $\overline{\langle \varphi \rangle} = G$

Hauptsatz der Galoistheorie:

Sei Ω/k eine Galoiserweiterung. Dann ist die Zuordnung

$$K \longmapsto \mathrm{Gal}(\Omega/K)$$

eine 1-1 Korrespondenz zwischen den Teilerweiterungen K/k von Ω/k und den abgeschlossenen Untergruppen von $\mathrm{Gal}(\Omega/k)$.
Die offenen Untergruppen entsprechen dabei genau den endlichen Teilerweiterungen.

Bemerkung: Für jede topologische Gruppe gilt:

a) $U \leq G$ offen $\Rightarrow$ U ist abgeschlossen

b) $\left.\begin{array}{l} U \leq G \text{ abgeschlossen} \\ (G:U) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ offen

c) Falls G kompakt und $U \leq G$, so gilt:

$$U \text{ offen} \iff (G:U) < \infty \text{ und } U \text{ abgeschlossen.}$$

§2 Abstrakte Galoistheorie

Def.: Sei G eine top. hausdorffsche Gruppe. Falls G kompakt ist und das Einselement eine Umgebungsbasis bestehend aus offenen Normalteilern hat, so nennt man G pro-endlich.

Standardbeispiel. $Gal(\Omega | k)$ mit der Krulltopologie.

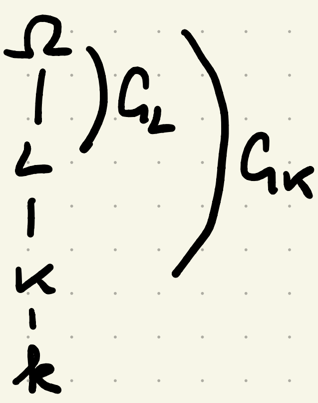
Sprechweisen:

$\{G_K \mid K \in X\}$ Menge der offenen Untergruppen von G.

Die Indizes nennen wir Körper.

K_0 mit $G_{K_0} = G$ heißt Grundkörper

Falls $G_K \supseteq G_L$, so schreibt man $L|K$ bzw. $K \subseteq L$ und definiert



$$[L : K] := (G_K : G_L)$$

$L|K$ heißt <u>normal</u>, falls $G_L \trianglelefteq G_K$.
Man schreibt dann: $G_{L|K} := G_K / G_L$.

Man setzt:

$$K = \bigcap_{i=1}^{n} K_i \quad :\Longleftrightarrow \quad G_K = \overline{\langle G_{K_i} : i = 1, \dots, n \rangle}$$

$$K = \prod_{i=1}^{n} K_i \quad :\Longleftrightarrow \quad G_K = \bigcap_{i=1}^{n} G_{K_i}$$

Falls $G_{L'} = \sigma G_L \sigma^{-1}$ für $\sigma \in G$, so schreibt man $L' = \sigma L$ und L und L' heißen <u>konjugiert</u>.

<u>Beispiel:</u> $k|\mathbb{Q}_p$ ein lokaler Kp., $G = G_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}|k)$

$$A = \bar{k}^{\times} \text{ ist } G\text{-Modul}$$

Sei G eine pro-endliche Gruppe und A ein G-Modul.

<u>Lemma:</u> FASÄ:

a) $G \times A \to A$, $(\sigma, a) \mapsto \sigma.a$ ist stetig (A diskret)

b) Für alle $a \in A$ ist

$$G_a := \{ \sigma \in G \mid \sigma . a = a \} \leq G$$

eine <u>offene</u> Untergruppe.

c) $A = \bigcup_{\substack{U \leq G \\ \text{offen}}} A^U$

<u>Beweis:</u> Übung