Vorlesung 17

22.6.2020

Korrektoren / Tutoren für LinAlg I im WS

Bitte bei Herrn Hofer oder bei mir melden.

Wiederholung

G Gruppe, A G-Modul

Satz:

A c.t. $\iff$ $H^{q_0}(U,A) = H^{q_0+1}(U,A) = 0$ für alle $U \leq G$ und ein $q_0 \in \mathbb{Z}$.

Satz:

a) $H^{-1}(U,A) = 0$, $\forall U \leq G$

b) $H^0(U,A)$ zyklisch von der Ordnung $|U|$

$\Longrightarrow$

für $\langle a \rangle = H^0(G,A)$ ist

$$a \cup \_ : H^q(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} H^q(G,A), \ \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Vervollständigung des Beweises:

$B := A \oplus \mathbb{Z}[G]$, $f: \mathbb{Z} \to B$, $1 \mapsto (a_0, N_G)$

$a = a_0 + N_G A$

Noch zu zeigen:

$$\bar{f}: \underset{\substack{\| \\ \mathbb{Z}/|U|\mathbb{Z}}}{H^0(U,\mathbb{Z})} \xrightarrow{\cong} H^0(U,B), \quad \forall U \leq G.$$

<u>Dazu:</u> Wegen

$$\begin{tikzcd} H^0(G,A) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[rr, bend right, "\cdot |G|/|U|"'] & H^0(U,A) \arrow[r, "\mathrm{Cor}"] & H^0(G,A) \end{tikzcd}$$

$$a = a_0 + N_G A \mapsto a_0 + N_U A$$

folgt für $m := \mathrm{ord}(\mathrm{Res}(a))$

$$0 = \mathrm{Cor}(\mathrm{Res}(ma)) = m \frac{|G|}{|U|} \cdot a$$

$\Rightarrow$ $|U|$ teilt von m

$\Rightarrow$ $m = |U|$ und $\langle \mathrm{Res}(a) \rangle = H^0(U,A)$

Wegen $\bar{f}(1 + |U|\mathbb{Z}) = (a_0 + N_U A, 0) = (\mathrm{Res}(a), 0)$

ist $\bar{f}: H^0(U,\mathbb{Z}) \to H^0(U,B) = H^0(U,A)$

surjektiv. Wegen

$$|H^0(U,\mathbb{Z})| = |U| = |H^0(U,A)|$$

folgt Injektivität. $\blacksquare$

SATZ von Tate:

Sei A ein G-Modul mit folgenden Eigenschaften.
Für alle $U \leq G$ ist

a) $H^1(U, A) = 0$

b) $H^2(U, A)$ ist zyklisch von der Ordnung $|U|$

Dann ist für $\langle a \rangle = H^2(G, A)$

$$a \cup \_ : H^q(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{q+2}(G, A), \quad \forall q \in \mathbb{Z}$$

ein Isom.

Zusatz: Erzeugt a die Gruppe $H^2(G, A)$, so erzeugt $\mathrm{Res}^G_U(a)$ die Gruppe $H^2(U, A)$.
Man erhält also auch Isom.

$$\mathrm{Res}^G_U(a) \cup \_ : H^q(U, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{q+2}(U, A)$$

Beweis: Betrachte $\delta: H^q(U, A^2) \xrightarrow{\simeq} H^{q+2}(U, A)$

$\Rightarrow H^{-1}(U, A^2) \simeq H^1(U, A) = 0$

$H^0(U, A^2) \simeq H^2(U, A)$ ist zyklisch von Ordnung $|U|$

Das Diagramm

nach vorigem Satz

$$\begin{tikzcd}
H^q(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta^{-1}a\cup-", "\sim"'] \arrow[d, equal] & H^q(G,A^2) \arrow[d, "\delta", "\simeq"'] \\
H^q(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "a\cup-"] & H^{q+2}(G,A)
\end{tikzcd}$$

kommutiert wegen

$$\delta(\delta^{-1}a\cup x) = \delta\delta^{-1}a \cup x = a\cup x$$

Der Zusatz folgt aus dem abschließenden Beweis des vorigen Satzes. ■

III. Lokale Klassenkp.theorie

§1 Abstrakte Klassenkörpertheorie

Einschub: Unendliche Galoistheorie

(siehe Neukirch, Zth., Kap. IV, §.1)

Sei k ein Kp. und $\bar{k}|k$ ein separabler Abschluß. Sei $G_k := Gal(\bar{k}|k)$ die absolute Galoisgruppe.

Def.: Sei Ω/k eine Galoiserweiterung und $G = \mathrm{Gal}(\Omega/k)$. Dann wird für $\sigma \in G$ durch die Nebenklassen

$$\sigma\,\mathrm{Gal}(\Omega/K) \quad , \quad K|k \text{ endlich und galoisch}$$

eine Umgebungsbasis von σ definiert. Die so erzeugte Topologie auf G heißt <u>Krulltopologie.</u>

<u>Bemerkung:</u> $\mathcal{U} \subseteq G$ ist offen, falls es zu jedem $\sigma \in \mathcal{U}$ eine endliche Galoiserweiterung $K|k$ gibt mit $\sigma\,\mathrm{Gal}(\Omega/K) \subseteq \mathcal{U}$.

<u>Satz:</u> Sei Ω/k eine Galoiserweiterung. Dann ist $G := \mathrm{Gal}(\Omega/k)$ hausdorffsch und kompakt.

<u>Beweisskizze:</u> Seien $\sigma \neq \tau$, $\sigma, \tau \in G$.

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[d, dash] \\
K \arrow[d, dash] \arrow[dd, dash, bend left=60, "{<\infty,\ gal.}"] \\
k(\alpha) \arrow[d, dash, "<\infty"'] \\
k
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \exists\, K|k$ endl., gal. mit

$$\sigma|_K \neq \tau|_K$$

$\Rightarrow \sigma\,\mathrm{Gal}(\Omega/K) \neq \tau\,\mathrm{Gal}(\Omega/K)$

$\Rightarrow \sigma\,\mathrm{Gal}(\Omega/K) \cap \tau\,\mathrm{Gal}(\Omega/K) = \emptyset$, da verschiedene Nebenklassen disjunkt sind.

Kurz zum Beweis der Kompaktheit:

Betrachte

$$h: G \longrightarrow \prod_{\substack{K|k \\ \text{endl., gal.}}} G(K|k)$$

$$\sigma \longmapsto \left(\sigma|_K\right)_K$$

$$\left.\begin{array}{c}\Omega \\ | \\ K \\ \text{gal}\ \ |\,)<\infty \\ k\end{array}\right) G$$

- h ist injektiv
- $h: G \longrightarrow h(G)$ ist ein Homöomorphismus
- $h(G) \subseteq \prod_{K} G(K|k)$ ist abgeschlossen

dies ist kompakt nach dem Satz von Tychonov

$\Rightarrow h(G) \simeq G$ ist kompakt. ■

<u>Bemerkung:</u> $h(G) \simeq \varprojlim_{\substack{K|k \\ \text{endl. gal.}}} Gal(K|k)$

Dabei:

$$\varprojlim_{\substack{K \text{ endl.} \\ \text{gal.}}} \mathrm{Gal}(K|k) = \left\{ (\sigma_K)_K \in \prod_K \mathrm{Gal}(K|k) \;\middle|\; \sigma_L\big|_K = \sigma_K \quad \forall\, L|K \right\}$$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[d, dash] \\ L \arrow[d, dash] \arrow[dd, bend left, dash, "\text{gal.}"] \\ K \arrow[d, dash] \arrow[d, bend right, dash, "\text{gal.}"'] \\ k \end{tikzcd} \quad \Big] < \infty$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(\Omega|k) & \longrightarrow & \varprojlim_K \mathrm{Gal}(K|k) \\ \sigma & \longmapsto & (\sigma|_K)_K \\ \big(\underset{\Omega}{\alpha} \longmapsto \tau_K(\alpha)\big) & \longleftarrow\!\!| & (\tau_K)_K \end{array}$$

falls $\alpha \in K$. (Wohldefiniertheit!)