Vorlesung 16

17.6.2020

FRAGE / BITTE:

Ich lese im WS 20/21 die Lineare Algebra I. Die Vorlesung wird betreut von Martin Mayer und Pascal Stucky. Wir suchen <u>gute</u> Korrektoren und Tutoren. Wenn Sie Interesse haben, so wenden Sie sich bitte an Martin Mayer oder an mich.

Vielen Dank

Wiederholung

- G zyklisch $\Rightarrow H^q(G,A) \simeq H^{q+2}(G,A)$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.
- Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$. Dann ist das Sechseck

$$\begin{tikzcd}
H^2(G,A) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & H^0(G,A) \arrow[r] & H^0(G,B) \arrow[r] & H^0(G,C) \arrow[d, "\delta"] \\
H^1(G,C) \arrow[u] \arrow[ur, dashed] & & H^1(G,B) \arrow[ll] & H^1(G,A) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

<u>Übung:</u> Exaktheit bei $H^0(G,A)$

- $h(A) := \dfrac{h_0(A)}{h_1(A)}$, $h_i(A) := |H^i(G,A)|$

  Herbrandquotient
- h ist multiplikativ in ses
- $|A| < \infty \Rightarrow h(A) = 1$

<u>Folgerung:</u> Sei G zyklisch und $f: A \to B$ habe endlichen Kern und Kokern. Dann gilt:

1) Falls $h(A)$ definiert ist, so auch $h(B)$ und umgekehrt.

2) $h(A) = h(B)$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(f) \arrow[r] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[r] & \mathrm{cok}(f) \arrow[r] & 0 \\
& & & W \arrow[ur, "\subseteq"'] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$W = \mathrm{im}(f)$

<u>Fall "$h(A)$ definiert":</u>

$\ker(f)$ endlich $\Longrightarrow$ $h(W)$ ist definiert

$\Longrightarrow$ $h(B)$ ist definiert

Es gilt:

$$h(A) = h(\underbrace{\ker(f)}_{\text{endl.}}) \cdot h(W)$$

$$= h(W)$$

$$= h(B) \Big/ h(\underbrace{\mathrm{cok}(f)}_{\text{endl.}}) = h(B).$$

$\blacksquare$

Der Herbrandquotient für $|G| = p$ Pz.

<u>Def.:</u> Sei A eine abelsche Gruppe. Setze

$$f(A) := \frac{|\mathrm{cok}(p)|}{|\ker(p)|},$$

wobei $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & A \\ a & \longmapsto & pa \end{array}$, falls $\mathrm{cok}(p)$ und $\ker(p)$ endlich sind.

<u>Bemerkung:</u> Falls A e-e ist, so ist

$$A \simeq A_{tor} \oplus \mathbb{Z}^{\alpha}$$

und $\mathrm{cok}(p) = A/pA \simeq A_{tor}/pA_{tor} \oplus \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^{\alpha}$

$$\ker(p) = \ker(A_{tor} \xrightarrow{p} A_{tor})$$

sind endlich.

<u>Satz:</u> Sei A ein G-Modul und $\mathrm{cok}(p)$ und $\ker(p)$ seien endlich. Dann sind auch

$$f(A^G),\ f(A_G),\ h(A)$$

definiert und es gilt

$$h(A)^{p-1} = \varphi(A^G)^p / \varphi(A)$$

<u>Beweis:</u> Übungsblatt

Hierbei: $A_G := A / I_G A$ heißt Koinvarianten von A.

Falls $G = \langle \sigma \rangle$, so ist

$$0 \to A^G \to A \xrightarrow{\sigma - 1} A \to A_G \to 0$$
$$a \mapsto \sigma a - a$$

exakt.

<u>Satz von Chevalley:</u> Sei $|G| = p$ und A ein e-e G-Modul. Sei

$$A \simeq A_{tor} \oplus \mathbb{Z}^\alpha \qquad \beta \leq \alpha$$

$$A^G \simeq \underbrace{(A^G)_{tor}}_{=(A_{tor})^G} \oplus \mathbb{Z}^\beta$$

Dann: $h(A) = p^{(p\beta - \alpha)/(p-1)}$.

Beweis: Betrachte

$$0 \to A_{tor} \xrightarrow{\subseteq} A \longrightarrow \underbrace{A_{tf}}_{A/A_{tor}} \to 0$$

$$\Rightarrow 0 \to A_{tor}^G \to A^G \to A_{tf}^G \to H^1(G, A_{tor})$$

ist exakt

$$\Rightarrow \underset{\beta}{\underset{\|}{rg_{\mathbb{Z}}(A^G)}} = rg_{\mathbb{Z}}(A_{tf}^G)$$

Ferner gilt:

$$h(A) = \underbrace{h(\underbrace{A_{tor}}_{\text{endl.}})}_{=1}\, h(A_{tf}) = h(A_{tf})$$

$$\Rightarrow h(A)^{p-1} = h(A_{tf})^{p-1} = \frac{f(A_{tf}^G)^p}{f(A_{tf})}$$

Es gilt:

$$f(A_{tf}) = \frac{|A_{tf}/pA_{tf}|}{|\ker(A_{tf} \xrightarrow{p} A_{tf})|} = |\underbrace{A_{tf}/pA_{tf}}_{\cong \mathbb{Z}^\alpha/p\mathbb{Z}^\alpha = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\alpha}| = p^\alpha$$

Ebenso: $f(A_{tf}^G) = p^\beta$

$\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

Der Satz von Tate

Satz: Sei G endlich und A ein G-Modul. Dann sind äquivalent:

a) A ist c.t.

b) $\exists q_0 \in \mathbb{Z}\ \forall U \leq G: \ H^{q_0}(U,A) = H^{q_0+1}(U,A) = 0.$

Beweis: Nur b) $\Rightarrow$ a) ist zu zeigen.

Für G zyklisch ist die Aussage klar.

Es reicht zu zeigen:

$$\left.\begin{array}{l} H^{q_0}(U,A) = H^{q_0+1}(U,A) = 0 \\ \text{für alle } U \leq G \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} H^{q_0-1}(U,A) = H^{q+2}(U,A) = 0 \\ \text{für alle } U \leq G. \end{array}$$

Mittels Dimensionsverschiebung führt man das auf den Fall $q_0 = 1$ zurück:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = H^{q_0}(U,A) \simeq H^1(U,A^{q_0-1}) \\ 0 = H^{q_0+1}(U,A) \simeq H^2(U,A^{q_0-1}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} H^{q_0-1}(U,U) \cong 0 = H^0(U,A^{q_0-1}) \\ H^q(U,A) \simeq H^3(U,A^{q_0-1}) = 0 \end{array}$$

oE $\quad H^1(U,A) = H^2(U,A) = 0, \quad \forall U \leq G$

Zu zeigen: $\quad H^0(U,A) = H^3(U,A) = 0, \; \forall U$

Induktion nach $|G|$

Induktionsanfang: $|G| = 1$ ✓

Induktionsannahme: $H^0(U,A) = H^3(U,A) = 0$ für alle $U \lneq G$.

Also zu zeigen: $H^0(G,A) = H^3(G,A) = 0 \quad (*)$

1. Fall: G ist keine p-Gruppe.

Dann sind alle p-Sylowuntergruppen echte Untergruppen. Dann folgt $(*)$ aus

$$H^q(G,A)_p \xhookrightarrow{\mathrm{Res}} H^q(G_p, A) = 0$$

nach Induktion

und

$$H^q(G,A) = \bigoplus_p H^q(G,A)_p \, .$$

2. Fall: G ist eine p-Gruppe

$\Rightarrow G$ ist auflösbar $\Rightarrow$ es gibt $H \lhd G$ mit

$$|G/H| = p$$

Wissen: $H^0(H,A) = H^3(H,A) = 0$

$\left(\text{und } H^1(H,A) = H^2(H,A) = 0\right)$

Inflation - Restriktions - Sequenz $\Longrightarrow$

$$0 \to H^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^1(G,A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(H,A)$$

ist exakt

$$\Longrightarrow \mathrm{Inf}: H^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\sim} H^1(G,A)$$

Dies gilt auch für $q = 1,2,3$!

Nun folgt:

zyklisch

$$H^1(G,A) = 0 \Longrightarrow H^1(G/H, A^H) = 0$$
$$\Longrightarrow H^3(G/H, A^H) = 0$$
$$\Longrightarrow H^3(G,A) = 0$$

Ebenso: $H^2(G,A) = 0 \Longrightarrow H^2(G/H, A^H) = 0$

$\Longrightarrow H^0(G/H, A^H) = 0$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{A^G}} = (A^H)^{G/H} = N_{G/H} A^H$$

$$0 = H^0(H,A) = A^H / N_H A$$

$$N_{G/H} A^H = N_{G/H} N_H A$$

$$H^0(G,A) = 0 \Longleftarrow \underline{\underline{N_G A}} = N_{G/H} N_H A \qquad \blacksquare$$

Satz: Sei A ein G-Modul mit folgender Eigenschaft: für alle $U \leq G$ ist

a) $H^{-1}(U, A) = 0$

b) $H^0(U, A)$ ist zyklisch von der Ordnung $|U|$.

Sei a ein Erzeuger von $H^0(G, A) = A^G / N_G A$. Dann ist

$$a \cup \_ : \quad H^q(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^q(G, A)$$

ein Isom. für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Sei $B := A \oplus \mathbb{Z}[G]$. Sei

$$\begin{aligned} i : A &\longrightarrow B = A \oplus \mathbb{Z}[G] \\ a &\longmapsto (a, 0) \end{aligned}$$

Dann ist

$$\bar{i} : H^q(U, A) \longrightarrow H^q(U, B) = H^q(U, A) \oplus \underbrace{H^q(U, \mathbb{Z}[G])}_{=0}$$

ein Isomorphismus.

Sei $a_0 \in A^G$, so daß $a = a_0 + N_G A$.

Betrachte

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow B = A \oplus \mathbb{Z}[\zeta]$$
$$n \longmapsto (n a_0, n N_G)$$

<u>klar:</u> f ist injektiv

Sei $\bar{f} : H^q(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^q(\mathcal{U}, B)$

Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
H^q(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \arrow[r, "a \cup -"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & H^q(\mathcal{U}, A) \arrow[d, "\bar{i}", "\cong"'] \arrow[dl, phantom, "\equiv"] \\
 & H^q(\mathcal{U}, B)
\end{tikzcd}$$

$$H^q(\mathcal{U}, B) = H^q(\mathcal{U}, A) \oplus \underbrace{H^q(\mathcal{U}, \mathbb{Z}[\zeta])}_{=0}$$

<u>denn:</u>

sei $b_q : G^q \longrightarrow \mathbb{Z}$ ein q-Kozyklus

$$\overline{b_q} \overset{a \cup -}{\longmapsto} \overline{a_0 \otimes b_q}$$

$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_q)$

$$\overline{b_q} \longmapsto \overline{(\sigma \mapsto (b_q(\sigma) a_0, b_q(\sigma) N_G))} = \overline{(\sigma \mapsto (b_q(\sigma) a_0, 0))} \mapsfrom \overline{a_0 \otimes b_q}$$

Also reicht es zu zeigen: $\bar{f}$ ist ein Iso.

Dazu:

$$(*) \quad 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} B \to C \to 0, \quad C := \mathrm{cok}(f)$$

ist exakt

$\Longrightarrow$

$$\underbrace{H^{-1}(U,B)}_{\underbrace{H^{-1}(U,A)}_{=0} \oplus \underbrace{H^{-1}(U,\mathbb{Z}[S])}_{=0}} \to H^{-1}(U,C) \to H^0(U,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\bar{f}} H^0(U,B) \to H^0(U,C) \to \underbrace{H^1(U,\mathbb{Z})}_{= \mathrm{Hom}(U,\mathbb{Z}) = 0}$$

nach Vor.

Beh: $\bar{f}$ ist ein Iso. für alle $U \leq G$.

n. z. z.

Dann folgt:

$$H^{-1}(U,C) = 0 = H^0(U,C)$$

$\Longrightarrow$ C ist c. t.

$\Longrightarrow$ die lange exakte Kohomologiesequenz zu $(*)$ liefert die Beh. oben.