Vorlesung 15

16.6.2020

Wiederholung

$$H^0(G,A) \times H^0(G,B) \longrightarrow H^0(G,A\otimes B)$$
$$(\bar a, \bar b) \longmapsto \overline{a\otimes b} =: \bar a \cup \bar b$$

Dimensionsverschiebung $\Rightarrow$

$$H^p(G,A) \times H^q(G,B) \longrightarrow H^{p+q}(G, A\otimes B)$$
$$(\bar a, \bar b) \longmapsto \bar a \cup \bar b$$

Eigenschaften:

a) $0 \to A \to A' \to A'' \to 0$
$0 \to A\otimes B \to A'\otimes B \to A''\otimes B \to 0$ beide exakt
$\Rightarrow \quad \delta(\overline{a''}) \cup \bar b = \delta(\overline{a''} \cup \bar b)$

$0 \to B \to B' \to B'' \to 0$
$0 \to A\otimes B \to A\otimes B' \to A\otimes B'' \to 0$ beide exakt
$\Rightarrow \quad \bar a \cup \delta(\overline{b''}) = (-1)^p \delta(\bar a \cup \overline{b''})$

b) Cupprodukt vertauscht mit Res.

c) $\mathrm{Kor}\left(\mathrm{Res}(\bar a) \cup \bar b\right)$ $\qquad \bar a \in H^p(G,A)$
$= \bar a \cup \mathrm{Kor}(\bar b)$ $\qquad \bar b \in H^q(U,B)$

d) $\bar a \cup \bar b = (-1)^{pq}\, \bar b \cup \bar a$

e) $\bar a_0 \cup \bar b_q = \overline{a_0 \otimes b_q}$ $\quad q \in \mathbb{Z}$ $\qquad \left(a_0 \otimes b_q : G^q \to A\otimes B\right.$
$(\sigma_1, \dots, \sigma_q) \mapsto a_0 \otimes b_q(\sigma_1 \dots))$

$$\overline{a_p} \cup \overline{b_0} = \overline{a_p \otimes b_0}, \quad p \in \mathbb{Z}$$

<u>Lemma:</u> $\overline{a_1} \in H^1(G, A)$, $\overline{b_{-1}} \in H^{-1}(G, B)$

$\Rightarrow$ $\overline{a_1} \cup \overline{b_{-1}} = \overline{x_0}$ mit

$$x_0 = \sum_{\tau \in G} a_1(\tau) \otimes \tau b_{-1}.$$

Zu Ungenauigkeiten im Beweis:

$$0 \to A \xrightarrow{\subseteq} A' \xrightarrow{\pi} A'' \to 0$$
$$a_0' \mapsto a_0''$$

$H^1(G, A') = 0 \Rightarrow \exists$ 0-Kokette $a_0' \in A_0' = A'$

mit $a_1(\tau) = \tau a_0' - a_0'$, $\forall \tau \in G$

<u>Beh:</u> $a_0'' \in (A'')^G$

<u>Dazu:</u> Sei $\tau \in G$. Dann gilt:

$$\tau(a_0'') - a_0'' = \tau(\pi(a_0')) - \pi(a_0')$$
$$= \pi(\tau(a_0') - a_0') = \pi(\underbrace{a_1(\tau)}_{\in A}) = 0 \qquad \blacksquare$$

Zur Erinnerung:

$$H^{-2}(G, \mathbb{Z}) \simeq G^{ab} = G/G'$$
$$\overline{\sigma} \longleftarrow \sigma G'$$

$$0 \to I_G \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

$$H^{-2}(G,\mathbb{Z}) \simeq H^{-1}(G, I_G) = I_G / I_G^2 \longrightarrow G^{ab} \qquad (*)$$

$$(\sigma - 1) + I_G^2 \longmapsto \sigma G'$$

<u>Lemma:</u>

$$\bar{a}_1 \cup \bar{\sigma} = \overline{a_1(\sigma)} \qquad \in H^{-1}(G, A)$$

<u>Bem:</u> Leichte Übung: $N_G(a_1(\sigma)) = 0$.

<u>Beweis:</u> Aus

$$0 \to A \otimes I_G \to A \otimes \mathbb{Z}[G] \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

erhält man

$$\delta : H^{-1}(G, A) \xrightarrow{\simeq} H^0(G, A \otimes I_G)$$

Wir werden zeigen: $\delta(\bar{a}_1 \cup \bar{\sigma}) = \delta(\overline{a_1(\sigma)})$

<u>Zur rechten Seite:</u> $a_1(\sigma) \otimes 1 \longmapsto a_1(\sigma)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A \otimes I_G & \to & A \otimes \mathbb{Z}[G] & \to & A & \to & 0 \qquad q = -1 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \to & A \otimes I_G & \to & A \otimes \mathbb{Z}[G] & \to & A & \to & 0 \qquad q = 0
\end{array}$$

Konstruktion von δ $\Rightarrow$ $\qquad \partial = N_G$

$$\delta(\overline{a_1(\sigma)}) = N_G(a_1(\sigma) \otimes 1) = \sum_{\tau \in G} \tau a_1(\sigma) \otimes \tau =: x_0$$

$$\delta(\overline{a_1} \cup \overline{\sigma}) = -\left(\overline{a_1} \cup \delta(\overline{\sigma})\right)$$

bez. $0 \to I_G \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$

$$\overset{(*)}{=} -\overline{a_1} \cup \overline{(\sigma - 1)} =: \overline{y_0}$$

Für das y_0 ergibt sich aus dem Lemma

$$y_0 = -\sum_{\tau \in G} a_1(\tau) \otimes \tau(\sigma - 1)$$

$$= \sum_{\tau \in G} a_1(\tau) \otimes \tau - \sum_{\tau \in G} a_1(\tau) \otimes \tau\sigma$$

$$= \sum_{\tau \in G} a_1(\tau) \otimes \tau - \sum_{\tau \in G} \left(a_1(\tau\sigma) - \tau a_1(\sigma)\right) \otimes \tau\sigma$$

$$= \sum_{\tau \in G} \tau a_1(\sigma) \otimes \tau\sigma$$

$$\Rightarrow y_0 - x_0 = \sum_{\tau \in G} \tau a_1(\sigma) \otimes \tau(\sigma - 1)$$

$$= N_G\Big(\underbrace{a_1(\sigma) \otimes (\sigma - 1)}_{A \otimes I_G}\Big) \in N_G(A \otimes I_G)$$

$$\Rightarrow \overline{y_0} = \overline{x_0}$$

in $H^0(G, A \otimes I_G)$ ∎

Anwendung: Sei $\bar{a}_2 \in H^2(G, A)$. Dann

$$\begin{tikzcd} \bar{a}_2 \cup \_ \; : & H^{-2}(G, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & A^G / N_G A \\ & G^{ab} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Homom. von abelschen Gruppen.

Satz: $\bar{a}_2 \cup \bar{\sigma} = \overline{\sum_{\tau \in G} a_2(\tau, \sigma)}$ in $H^0(G, A)$

Übung: Rechne nach, dass

$$\sum_{\tau \in G} a_2(\tau, \sigma) \in A^G$$

Beweis: Aus

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow I_G \to 0$$

folgt die exakte Sequenz

$$0 \to A \xrightarrow{\subseteq} \underbrace{A \otimes \mathbb{Z}[G]}_{=: A'} \longrightarrow \underbrace{A \otimes I_G}_{=: A''} \to 0$$

Wegen $H^2(G, A') = 0$ gibt es eine 1-Kokette $a_1' \in A_1'$ mit $a_2 = \partial a_1'$. D.h.

(*) $a_2(\tau,\sigma) = \tau a_1'(\sigma) - a_1'(\tau\sigma) + a_1'(\tau)$, $\forall \tau,\sigma \in G$

Betrachte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & A_1' \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & A_1'' \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & A_2' \arrow[r] & A_2'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$a_1' \longmapsto a_1''$

Dann ist a_1'' ein 1-Kozyklus, da a_2 eine 2-Kokette mit Werten in A ist. Nach Konstruktion des Korandenhomom. gilt:

$$\delta(\overline{a_1''}) = \overline{a_2}$$

Es folgt:

$$\underbrace{\overline{a_2} \cup \overline{\sigma}}_{\in H^0(G,A)} = \delta(\overline{a_1''}) \cup \overline{\sigma} = \delta(\underbrace{\overline{a_1''} \cup \overline{\sigma}}_{\in H^{-1}(G,A)})$$

$$\overset{\text{Lemma}}{=} \delta(\underbrace{\overline{a_1''(\sigma)}}_{\in H^{-1}(G,A'')}) = (**)$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & A'_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & A''_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r] & A'_0 \arrow[r] & A''_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$a'_1(\sigma) \mapsto a''_1(\sigma)$

$$\partial = N_G$$

$$\Rightarrow (**) = \overline{\partial(a'_1(\sigma))}$$

$$= \overline{\sum_{\tau \in G} \tau\, a'_1(\sigma)}$$

$$\overset{(*)}{=} \overline{\sum_{\tau \in G} \left(a_2(\tau, \sigma) + a'_1(\tau\sigma) - a'_1(\tau)\right)}$$

$$= \overline{\sum_{\tau \in G} a_2(\tau, \sigma)} \qquad \blacksquare$$

<u>Kohomologie zyklischer Gruppen</u>

<u>Satz:</u> Sei $G = \langle \sigma \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Sei A ein G-Modul. Dann gilt für alle $q \in \mathbb{Z}$

$$H^q(G, A) \simeq H^{q+2}(G, A), \quad \forall q \in \mathbb{Z}$$

<u>Beweis:</u> Wir zeigen

$$H^{-1}(G,A) \simeq H^1(G,A) \qquad (*)$$

Der allgemeine Fall folgt mittels Dimensionsverschiebung

$$H^q(G,A) \simeq H^{-1}(G,A^{q+1}) \simeq H^1(G,A^{q+1}) \simeq H^{q+2}(G,A)$$

Zu $(*)$: $\quad {}_{N_G}A / I_G A \quad \simeq \quad Z_1 / B_1$

Sei $x \in Z_1 \Rightarrow \underline{\underline{x(\sigma^k)}} = \sigma x(\sigma^{k-1}) + x(\sigma) \qquad k \geq 2$

$$= \ldots$$

$$= \underline{\underline{\sum_{i=0}^{k-1} \sigma^i x(\sigma)}}$$

(aus $x(\sigma\tau) = \sigma x(\tau) + x(\sigma)$.)

$$\Rightarrow N_G x(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i x(\sigma) = x(\sigma^n) = x(1) = 0$$

$\Rightarrow x(\sigma) \in {}_{N_G}A$, d.h. wir haben einen Homom.

$$Z_1 \longrightarrow {}_{N_G}A / I_G A$$

<u>Nachzurechnen:</u> B_1 geht auf 0. (Ü)

Umgekehrt wird für $a \in_{N_G} A$ durch

$$x(\sigma) := a$$

ein 1-Kozyklus definiert, <u>denn:</u>

$$x(\sigma^2) = \sigma x(\sigma) + x(\sigma)$$

bzw. allgemein: $x(\sigma^k) := \sum_{i=0}^{k-1} \sigma^i(a)$

Die einzige Bedingung ist gegeben durch

$$0 = x(\sigma^n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i a \,,$$ die

für $a \in_{N_G} A$ erfüllt ist.

<u>Übung:</u> Ränder gehen auf Ränder $\blacksquare$

<u>Bemerkung:</u> Sei G zyklisch und

$$0 \to A \to B \to C \to 0 \quad \text{exakt.}$$

Dann hat man ein exaktes Hexagon

$$\begin{tikzcd}
H^2(G,A) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & H^0(G,A) \arrow[r] & H^0(G,B) \arrow[dr] & \\
H^1(G,C) \arrow[u, dashed, "\delta"] \arrow[ur] & H^{-1}(C) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[u, "\delta"'] & & H^0(G,C) \arrow[dl, "\delta"] \\
& H^1(G,B) \arrow[ul] & H^1(G,A) \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

Der Herbrandquotient

Def.: Sei G zyklisch und $H^0(G,A)$ und $H^1(G,A)$ endlich. Dann nennt man

$$h(A) := \frac{|H^0(G,A)|}{|H^1(G,A)|} =: \frac{h_0(A)}{h_1(A)}$$

den <u>Herbrandquotient</u> von A.

Satz: Sei

$$0 \to A \to B \to C \to 0 \quad \text{exakt.}$$

Sei für mindestens zwei der Herbrandquotient definiert. Dann ist er auch für den dritten Modul definiert und es gilt

$$h(B) = h(A) \cdot h(C).$$

Beweis: Aus dem exakten Hexagon folgt:

$$\frac{h_0(A)\, h_0(C)\, h_1(B)}{h_0(B)\, h_1(A)\, h_1(C)} = 1.$$

ü

∎

Satz: Falls $|A| < \infty$, so ist $h(A) = 1$.

Beweis: Aus

$$0 \to A^G \to A \xrightarrow{\sigma - 1} A \longrightarrow A/I_G A \to 0$$

$$\left(I_G = (\sigma - 1)\,\mathbb{Z}[G] \Rightarrow I_G A = (\sigma-1)A \right)$$

folgt

$$|A^G| = |A/I_G A| .$$

Aus

$$0 \to \underbrace{N_G A / I_G A}_{H^{-1}(G,A)} \longrightarrow A/I_G A \xrightarrow{N_G} A^G \longrightarrow \underbrace{A^G / N_G A}_{H^0(G,A)} \to 0$$

folgt

$$\begin{array}{ccc} h_{-1}(A) & = & h_0(A) \\ \| & & \\ h_1(A) & & \end{array}$$

$\blacksquare$