Vorlesung 14

10.6.2020

Montag, 15.6., keine Vorlesung

Statt dessen: am

Di, 16.6. um 12^{15}

Das Cupprodukt

Definition des Cupprodukts für $q=0$:

Seien A, B zwei G-Moduln. Dann ist auch $A \otimes B$ ein G-Modul (Erinnerung: $\sigma(a \otimes b) = \sigma(a) \otimes \sigma(b)$). Für die bilineare Abb.

$$\begin{aligned} A \times B &\longrightarrow A \otimes B \\ (a, b) &\longmapsto a \otimes b \end{aligned}$$

gilt:

$$A^G \times B^G \longrightarrow (A \otimes B)^G$$

$$N_G A \times N_G B \longrightarrow N_G(A \otimes B), \text{ denn:}$$

$$N_G a \otimes N_G b = \Big(\sum_{\sigma \in G} \sigma a\Big) \otimes N_G b = \sum_{\sigma \in G} \sigma(a \otimes N_G b)$$

Also induziert $(a, b) \mapsto a \otimes b$ einen Homom.

$$\begin{aligned} H^0(G, A) \times H^0(G, B) &\longmapsto H^0(G, A \otimes B) \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\longmapsto \overline{a \otimes b} \in (A \otimes B)^G / N_G(A \otimes B) \end{aligned}$$

<u>Bezeichnung:</u> $\bar{a} \cup \bar{b} := \overline{a \otimes b}$

heißt <u>Cupprodukt in Dimension 0.</u>

<u>Definition:</u> Es gibt eine eindeutig bestimmte Familie von bilinearen Abbildungen

$$\_ \cup \_ : H^p(G,A) \times H^q(G,B) \longrightarrow H^{p+q}(G, A \otimes B)$$

für $p,q \in \mathbb{Z}$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für $p=q=0$ ist $\bar{a} \cup \bar{b} = \overline{a \otimes b}$

(ii) Sind $0 \to A \to A' \to A'' \to 0$

und $0 \to A\otimes B \to A'\otimes B \to A''\otimes B \to 0$

exakt, so kommutiert

$$\begin{tikzcd}
H^p(G,A'') \times H^q(G,B) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\delta"] \arrow[d, shift left=30, "id"] & H^{p+q}(G,A''\otimes B) \arrow[d, "\delta"] \\
H^{p+1}(G,A) \times H^q(G,B) \arrow[r, "\cup"] & H^{p+q+1}(G,A\otimes B)
\end{tikzcd}$$

d.h. $\delta(\bar{a''}) \cup \bar{b} = \delta(\overline{a''} \cup \bar{b})$.

(iii) Sind $0 \to B \to B' \to B'' \to 0$
und $0 \to A\otimes B \to A\otimes B' \to A\otimes B'' \to 0$
exakt, so kommutiert

$$\begin{tikzcd}
H^p(G,A) \times H^q(G,B'') \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, phantom, shift left=20ex, ""] & H^{p+q}(G, A\otimes B'') \arrow[d, "(-1)^p\delta"] \\
H^p(G,A) \times H^{q+1}(G,B) \arrow[r, "\cup"] & H^{p+q+1}(G, A\otimes B)
\end{tikzcd}$$

(mit $\delta: H^q(G,B'') \to H^{q+1}(G,B)$ auf dem zweiten Faktor)

ohne Beweis. Hier ist die Konstruktion:

$$\begin{tikzcd}
H^0(G,A^p) \times H^0(G,B^q) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\delta^p", "\simeq"'] & H^0(G,A^p\otimes B^q) = H^0(G,(A\otimes B^q)^p) \arrow[d, "\delta^p"] \\
H^p(G,A) \times H^0(G,B^q) \arrow[r, dashed, "\cup"] \arrow[d, "\delta^q"] & H^p(G,(A\otimes B)^q) = H^p(A\otimes B^q) \arrow[d, "(-1)^{pq}\delta^q"] \\
H^p(G,A) \times H^q(G,B) \arrow[r, dashed, "\cup"] & H^{p+q}(G,A\otimes B)
\end{tikzcd}$$

Hierbei werden
$A\otimes B^q = A\otimes J_G\otimes\ldots\otimes J_G\otimes B = (A\otimes B)^q$ etc.
identifiziert.

Die Notwendigkeit des Faktors $(-1)^{pq}$ resultiert aus der Antikommutativität der Verbindungshomom. in einem exakten 3-er Diagramm.

<u>Motivation:</u> Sei $K|\mathbb{Q}_p$ endlich. Sei

$$\left.\begin{array}{c} L \\ {\scriptstyle <\infty}\ {\scriptstyle u /}\,\Big|\,{\scriptstyle F} \\ K \end{array}\right)\ G \text{ ab.}$$

Wir werden zeigen:

$H^2(G, L^\times)$ ist zyklisch von der Ordnung $[L:K]$ mit einem ausgezeichneten

Brauergruppe

Erzeuger $\alpha_{L|K}$ (verträglich mit Res und Inf)

lokale Fundamentalklasse

Man erhält folgenden Isomorphismus

$$-\cup \alpha_{L|K} : G = G^{ab} \cong H^{-2}(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(G, \mathbb{Z} \otimes L^\times)$$

$$G \dashrightarrow K^\times / N_{L|K}(L^\times) = H^0(G, L^\times)$$

Inverses zur Artinabb.

Funktorielle Eigenschaften des Cupprodukts

a) Sind $f : A \to A'$ und $g : B \to B'$ zwei G-Homom. und

$$f \otimes g : \begin{array}{rcl} A \otimes B & \to & A' \otimes B' \\ a \otimes b & \mapsto & f(a) \otimes g(b) \end{array}.$$

Dann gilt für $\bar{a} \in H^p(G, A)$, $\bar{b} \in H^q(G, B)$

$$\bar{f}\,\bar{a} \cup \bar{g}\,\bar{b} = \overline{(f \otimes g)}\,(\bar{a} \cup \bar{b})$$

in $H^{p+q}(G, A' \otimes B')$

b) Seien A, B G-Moduln und $U \leq G$. Dann gilt

$$\mathrm{Res}(\bar{a} \cup \bar{b}) = \mathrm{Res}(\bar{a}) \cup \mathrm{Res}(\bar{b})$$

in $H^{p+q}(U, A \otimes B)$

c) Für $\bar{a} \in H^p(G, A)$, $\bar{b} \in H^q(U, B)$ gilt:

$$\mathrm{Kor}(\underbrace{\mathrm{Res}(\bar{a}) \cup \bar{b}}_{\in H^{p+q}(U, A \otimes B)}) = \bar{a} \cup \mathrm{Kor}(\bar{b})$$

in $H^{p+q}(G, A \otimes B)$.

d) (Antikommutativität)

Wir identifizieren $A \otimes B = B \otimes A$ und
$a \otimes b \mapsto b \otimes a$

$H^{p+q}(G, A \otimes B) = H^{p+q}(G, B \otimes A)$. Dann gilt
für $\bar{a} \in H^p(G, A)$, $\bar{b} \in H^q(G, B)$:

$$\bar{a} \cup \bar{b} = (-1)^{pq}\, \bar{b} \cup \bar{a}$$

e) Für $\bar{a} \in H^p(G, A)$, $\bar{b} \in H^q(G, B)$, $\bar{c} \in H^r(G, C)$ gilt

$$(\bar{a} \cup \bar{b}) \cup \bar{c} = \bar{a} \cup (\bar{b} \cup \bar{c})$$

in $H^{p+q+r}(G, \underbrace{(A \otimes B) \otimes C}_{= A \otimes (B \otimes C)}) = H^{p+q+r}(G, A \otimes (B \otimes C))$

Das Cupprodukt kann man explizit beschreiben, falls $p = 0$ oder $q = 0$ ist. Beachte dazu, daß mit

$$b_q : G \times \dots \times G \longrightarrow B \quad , q \geq 1$$

auch
$$a_0 \otimes b_q : G \times \dots \times G \longrightarrow A \otimes B$$
$$(\sigma_1, \dots, \sigma_q) \mapsto a_0 \otimes b_q(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$$
ein q-Kozyklus ist. Analog für $a_p \otimes b_0$

Satz: Es gilt für alle $p, q \in \mathbb{Z}$

$$\overline{a_0} \cup \overline{b_q} = \overline{a_0 \otimes b_q}$$

$$\overline{a_p} \cup \overline{b_0} = \overline{a_p \otimes b_0}$$

Beachte: $A_q = A_{-q-1}$, $\quad q \geq 1$

Die Beh. gilt auch für $p = q = -1$

(Übung).

Lemma Sei $\overline{a_1} \in H^1(G, A)$ und $\overline{b_{-1}} \in H^{-1}(G, B)$.

Dann gilt $\quad b_{-1} \in {}_{N_G}B$

$$\overline{a_1} \cup \overline{b_{-1}} = \overline{x_0} \in H^0(G, A \otimes B)$$

$$H^0(G, A\otimes B) = (A \otimes B)^G / N_G(A \otimes B)$$

mit

$$x_0 = \sum_{\tau \in G} a_1(\tau) \otimes \tau b_{-1} .$$

<u>Beweis:</u> Sei $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}[G] \to J_G \to 0$.

Wende $\_\otimes A$ und $\_\otimes A\otimes B$ an

$\Longrightarrow$
$$0 \to A \longrightarrow A' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$
$$0 \to A\otimes B \to A'\otimes B \to A''\otimes B \to 0$$

sind exakt. $\left(\begin{array}{l} A' = A\otimes \mathbb{Z}[G] \quad \text{c.t.} \\ A'' = J_G \otimes A \end{array} \right)$

Betrachte $A \hookrightarrow A'$ bzw. $A\otimes B \hookrightarrow A'\otimes B$ als Inklusion.

Es gilt:

$H^1(G, A') = 0 \implies \exists$ 0-Kokette $a_0' \in A_0' = A'$

mit $\quad a_1(\tau) = \tau a_0' - a_0', \quad \forall \tau \in G. \; (*)$

Sei $a_0'' \in (A'')^G$ das Bild von a_0' in $A_0'' = A''$

Dann gilt: $\overline{a_1} = \delta(\overline{a_0''})$, <u>denn:</u>

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A_0 = A & \longrightarrow & A_0' = A' & \longrightarrow & A_0'' = A'' & \longrightarrow & 0 & \quad q=0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & a_0' \longmapsto a_0'' & \downarrow \partial & \tau \mapsto \tau a_0'' - a_0'' & \\ 0 & \to & A_1 & \longrightarrow & A_1' & \longrightarrow & A_1'' & \longrightarrow & 0 & \quad q=1 \end{array}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{a_1} \cup \overline{b_{-1}} &= \delta(\overline{a_0''}) \cup \overline{b_{-1}} \\
&= \delta(\overline{a_0''} \cup \overline{b_{-1}}) \\
&= \delta(\overline{a_0'' \otimes b_{-1}}) \\
&= \overline{\partial(a_0' \otimes b_{-1})} \\
&= \overline{N_G(a_0' \otimes b_{-1})} \\
&= \overline{\sum_\tau (\tau a_0' \otimes \tau b_{-1})} \\
&\overset{(*)}{=} \overline{\sum_\tau ((a_1(\tau) + a_0') \otimes \tau b_{-1})} \\
&= \overline{\sum_\tau (a_1(\tau) \otimes \tau b_{-1})} + \underbrace{\overline{\sum_\tau a_0' \otimes \tau b_{-1}}}_{= \overline{a_0' \otimes N_G b_{-1}} = 0} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

(*) aus $0 \to A \otimes B \to A' \otimes B \to A'' \otimes B \to 0$

und Definition des Verbindungshomom.

$$\delta : H^{-1}(G, A \otimes B) \longrightarrow H^0(G, A \otimes B)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & A \otimes B & \to & A' \otimes B & \to & A'' \otimes B & \to 0 & & q=-1 \\
& \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial = N_G & & & \\
0 \to & A \otimes B & \to & A' \otimes B & \to & A'' \otimes B & \to 0 & & q=0
\end{array}$$