

Vorlesung 13

8.6.2020



Wiederholung

$U \subseteq G$, A G -Modul, $q \geq 1$, $x \in A_q$, d.h.

$$x: G^q \rightarrow A \rightsquigarrow \text{res}(x): U^q \rightarrow A$$

A^u ist G/U -Modul

$$x: G/U \times \dots \times G/U \rightarrow A^u$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \downarrow \cong \\ G \times \dots \times G & \xrightarrow{\text{inf}(x)} & A \end{array}$$

Inflations-Restrictions-Sequenz:

$$0 \rightarrow H^i(G/U, A^u) \xrightarrow{\text{Inf}} H^i(G, A) \xrightarrow{\text{Res}} H^i(U, A)$$

ist exakt

- Falls $H^i(U, A) = 0$ für $i = 1, \dots, q-1$ gilt, so gilt die Aussage auch für $q \geq 1$.

Bemerkung: $\text{Res}: H^q(G, A) \rightarrow H^q(U, A)$
kann man für alle $q \in \mathbb{Z}$ definieren

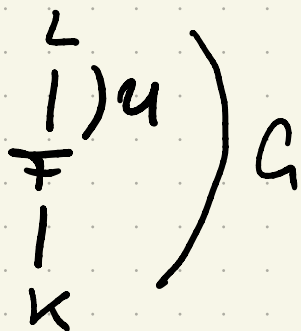
(mit Dimensionsverschiebung)

$$\text{Hier: } \text{Res}_0: \begin{array}{ccc} A^G / N_G A & \rightarrow & A^u / N_u A \\ a + N_G A & \mapsto & a + N_u A \end{array}$$

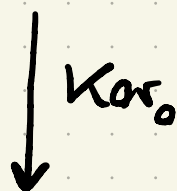
ZIEL: $\text{Kor}_q : H^q(U, A) \rightarrow H^q(G, A), \forall q \in \mathbb{Z}$

Beispiel:

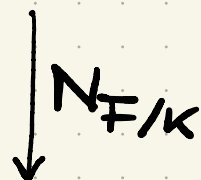
$A = L^x, L^+, I_L, \text{ etc.}$



$H^0(U, L^x) = F^x / N_{L/F}(L^x)$



$H^0(G, L^x) = K^x / N_{L/K}(L^x)$



q = -1

$H^{-1}(U, A) \xrightarrow{\text{Kor}_q} H^{-1}(G, A)$

$a \in N_u A$

$a + I_u A \mapsto a + I_G A$

q = 0

$A^u / N_u A \xrightarrow{\text{Kor}_0} A^G / N_G A$

$a \in A^u$

$a + N_u A \mapsto \underbrace{N_{G/u} a + N_G A}_{\in a \in A^G}$

Dies ist verträglich mit den Verbindungslemmen.

Definition der Korrestriktion:

Sei $U \leq G$. Unter der Korrestriktion versteht man die eindeutig bestimmte Familie von Homom.

$$\text{Kor}_q : H^q(U, A) \rightarrow H^q(G, A), \quad \forall q \in \mathbb{Z}$$

mit:

- (1) $\text{Kor}_0(a + N_U A) = N_{G/U} a + N_G A$
- (2) Für jede exakte Sequenz von G -Moduln

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

kommutiert für alle $q \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccc} H^q(U, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(U, A) \\ \downarrow \text{Kor}_q & & \downarrow \text{Kor}_{q+1} \\ H^q(G, C) & \xrightarrow{\delta} & H^q(G, A) \end{array}$$

Beweisansatz: Konstruktion von Kor_q :

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, A^q) & \xrightarrow[\cong]{\delta_G^q} & H^q(G, A) \\ \uparrow \text{Kor}_0 & & \vdots \\ H^0(U, A^q) & \xrightarrow[\cong]{\delta_U^q} & H^q(U, A) \end{array} \quad \text{Kor}_q \quad \blacksquare$$

Satz: $\text{Kor}_q \circ \text{Res}_q = (G:U) \text{id}$, $\forall q \in \mathbb{Z}$

Bew: Sei $\bar{a} = a + N_G A \in H^0(G, A)$, $a \in A^G$.

Dann:

$$\begin{aligned} \text{Kor}_0 \left(\text{Res}_0 (a + N_G A) \right) &= \text{Kor}_0 (a + N_U A) \\ &= \underbrace{N_{G/U} a}_{(G:U)a} + N_G A = (G:U) \cdot (a + N_G A) \end{aligned}$$

Betrachte

$$\begin{array}{ccccc} H^0(G, A^q) & \xrightarrow{\text{Res}_0} & H^0(U, A^q) & \xrightarrow{\text{Kor}_0} & H^0(G, A^q) \\ \cong \downarrow \delta^q & & \cong \downarrow \delta^q & & \cong \downarrow \delta^q \\ H^q(G, A) & \xrightarrow{\text{Res}_q} & H^q(U, A) & \xrightarrow{\text{Kor}_q} & H^q(G, A) \end{array}$$

Seien A, B G -Moduln und $f: A \rightarrow B$ ein G -Modulhomom. Dann induziert f einen Gruppenhomom.

$$f: H^q(G, A) \rightarrow H^q(G, B)$$

Dazu: $A_q = A_{-q-1} = \{x : G^q \rightarrow A\}, q \geq 1$

Jedes x liefert eine q -Kohötte in $Z_q = B_{-q-1}$

$$f \circ x : G^q \rightarrow B.$$

Satz: Res und Ker sind funktoriell in folgendem Sinn: Für jeden G -Homom.

$$f : A \rightarrow B$$

ist

$$\begin{array}{ccc} H^q(G, A) & \xrightarrow{f} & H^q(G, B) \\ \text{Res}_f \downarrow \uparrow \text{Ker}_f & & \text{Res}_f \downarrow \uparrow \text{Ker}_f \\ H^q(U, A) & \xrightarrow{f} & H^q(U, B) \end{array}$$

kommunikativ.

Beweis: Siehe Neubirch, Satz (4.15) \blacksquare

Definition: Für eine Primzahl p sei $H^q(G, A)_p$ die p -Sylow-Unterguppe von $H^q(G, A)$. Man nennt dies den p -primären

Teil.

Es gilt:

$$\bullet H^i(G, A) = \bigoplus_{P \mid |G|} H^i(G, A)_P, \text{ da}$$

$$|G| \cdot H^i(G, A) = 0.$$

$$\bullet H^i(G, A)_P = \left\{ \bar{x} \in H^i(G, A) \mid \text{ord}(\bar{x}) = p^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\bullet H^i(G, A)_P \cong_{\mathbb{Z}} H^i(G, A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_P \\ \cong_{\mathbb{Z}} H^i(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_P)$$

betrachte $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_P$ als $\mathbb{Z}_P[G]$ -Modul.

Starte hier mit der Standardauflösung von \mathbb{Z}_P . Beachte dazu

$$\mathbb{Z}_P \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(-, A) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}_P[G]}(-, A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_P)$$

Satz: Sei A ein G -Modul und $G_p \leq G$ eine p -Sylow-Untergruppe. Dann gilt:

$$\text{Res} : H^q(G, A)_p \hookrightarrow H^q(G_p, A)$$

$$\text{Kor} : H^q(G_p, A) \longrightarrow H^q(G, A)_p$$

Beweis:

$$\begin{array}{ccc}
 & & H^q(G, A) \\
 & \xrightarrow{(G:G_p)\text{id}} & \\
 H^q(G, A)_p & & \uparrow \\
 & \xrightarrow[\cong]{(G:G_p)\text{id}} & H^q(G, A)_p \\
 & \searrow \text{Res} & \swarrow \text{Kor} \\
 & H^q(G_p, A) &
 \end{array}$$

$$\text{Kor} : H^q(G_p, A) \longrightarrow H^q(G, A)_p,$$

$$\text{da } |G_p| \nmid H^q(G_p, A) \quad \blacksquare$$

Folgerung:

$$\left. \begin{array}{l}
 H^q(G_p, A) = 0, \quad \forall p \mid |G| \\
 \text{und eine } p\text{-Sylow-} \mathcal{U}\text{-gr.} \\
 G_p \leq G
 \end{array} \right\} \Rightarrow H^q(G, A) = 0 \quad \blacksquare$$

Shapiras Lemma

Def.: Sei $U \leq G$. Ein G -Modul A heißt G/U -induziert, falls es einen U -Modul D gibt, so daß

$$A = \bigoplus_{\sigma \in G/U} \sigma D$$

Beispiel: $\mathbb{Z}[G/U]$ ist ein G -Modul; die G -Wirkung ist gegeben durch: $g \cdot (g^{-1}U) := gg^{-1}U$.

Es gilt:

$$\mathbb{Z}[G/U] = \bigoplus_{\sigma \in G/U} \sigma \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[U]} \mathbb{Z}$$

Bemerkung: Die G/U -induzierten sind genau die Moduln $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[U]} X$ mit einem U -Modul X .

Explizit: Sei $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ ein VS von G/U .

Dann gilt: $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[U]} X = \bigoplus_{i=1}^m \sigma_i \otimes X$,
d.h. jedes Element hat eine eindeutige

Darstellung $\sum_{i=1}^m \sigma_i \otimes x_i =: \lambda \in \mathbb{Z}[\mathcal{G}] \otimes_{\mathbb{Z}[\mathcal{U}]} X$

Sei $\tau \in \mathcal{G}$. Was ist $\tau \lambda$?

$$\underline{\underline{\tau \lambda}} = \sum_{i=1}^m \tau \sigma_i \otimes x_i = \sum_{i=1}^m \underbrace{\sigma_{\pi_{\tau}(i)}}_{\sigma_{\pi_{\tau}(i)}} \otimes \mu_{\tau, i} x_i$$

$$\tau \sigma_i = \sigma_{\pi_{\tau}(i)} \mu_{\tau, i}, \quad \forall \tau \in \mathcal{G}, \quad i=1, \dots, m$$

$$\pi_{\tau}: \{1, \dots, m\} \xrightarrow{\cong} \{1, \dots, m\}$$

Satz: (Lemma von Shapiro)

Sei A ein \mathcal{G}/\mathcal{U} -invarianter Modul,

$$A = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{G}/\mathcal{U}} \sigma \mathbb{D} = \mathbb{Z}[\mathcal{G}] \otimes_{\mathbb{Z}[\mathcal{U}]} \mathbb{D}$$

mit einem \mathcal{U} -Modul \mathbb{D} . Dann gilt:

$$H^q(\mathcal{G}, A) \cong H^q(\mathcal{U}, \mathbb{D}), \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Der Isomorphismus ist gegeben durch

$$H^q(\mathcal{G}, A) \xrightarrow{\text{Res}} H^q(\mathcal{U}, A) \xrightarrow{\bar{\pi}} H^q(\mathcal{U}, \mathbb{D})$$

wobei $\pi: A \rightarrow \mathbb{D}$ die Projektion auf die Komponente der 1 ist.

Beweisskizze:

" $q=0$ " + Dimensionsverschiebung ∇

Zu " $q=0$ "

$$A^G / N_G A \xrightarrow{\text{Res}_0} A^u / N_u A \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}^u / N_u \mathbb{D}$$

Betrachte $\nu: \mathbb{D}^u / N_u \mathbb{D} \rightarrow A^G / N_G A$

$$d + N_u \mathbb{D} \mapsto \sum_{\sigma \in G/u} \sigma d + N_G A$$

Zeige (Übung): ν ist die inverse Abb. \square

Bemerkung: • Für $u=1$ ergeben sich die G -invarianten Moduln

• Shapiro $\xrightarrow{u=1}$

$$H^q(G, A) \cong H^q(1, \mathbb{D}) = 0$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} L \\ I \\ K \\ I \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix} G$$

$I_2 =$ gebrochene Ideale

$$L \supseteq \mathcal{O}_L \supseteq \mathfrak{p}$$

Sei

$$\left| \begin{array}{c} L \\ \mathfrak{p} \end{array} \right|$$

$$\mathcal{I}_L(\mathfrak{p}) := \left\{ \mathfrak{p}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{a_r} \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$K \supseteq \mathcal{O}_K \supseteq \mathfrak{q}$$

wobei $\mathfrak{q}\mathcal{O}_L = (\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r)^e$

Dann folgt aus dem Satz der eindeutigen Primidealzerlegung

$$\bullet \quad \mathcal{I}_L = \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathcal{P} \\ \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_K \neq (0)}} \mathcal{I}_L(\mathfrak{p})$$

$$\bullet \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{I}_L(\mathfrak{p}) & \simeq & \mathbb{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}] \\ \prod_{\mathfrak{v}} \mathfrak{p}^{a_{\mathfrak{v}}} & \longleftarrow & \sum_{\mathfrak{v}} a_{\mathfrak{v}} \mathfrak{v} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Iso. von} \\ \mathbb{Z}[\mathcal{G}]\text{-Moduln} \end{array}$$

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{p}} = \{ \sigma \in \mathcal{G} \mid \sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \}$$

Dann: $H^q(\mathcal{G}, \mathcal{I}_L) = \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^q(\mathcal{G}, \mathcal{I}_L(\mathfrak{p}))$

$$\simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^q(\mathcal{G}, \mathbb{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}]) \underset{\text{Shapiro}}{\simeq} \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^q(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{Z}) = \text{bekannt für } q \in \{-2, \dots, 2\}$$