Vorlesung 13

8.6.2020

Wiederholung

$U \leq G$, A G-Modul, $q \geq 1$, $x \in A_q$, d.h.

$$x : G^q \to A \rightsquigarrow \mathrm{res}(x) : U^q \to A$$

A^U ist G/U-Modul

$$\begin{tikzcd} x : G/U \times \dots \times G/U \arrow[r] & A^U \arrow[d, "\subseteq"] \\ G \times \dots \times G \arrow[u] \arrow[r, dashed, "\inf(x)"] & A \end{tikzcd}$$

Inflations-Restriktions-Sequenz:

- $0 \to H^1(G/U, A^U) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(U, A)$ ist exakt
- Falls $H^i(U, A) = 0$ für $i = 1, \dots, q-1$ gilt, so gilt die Aussage auch für $q \geq 1$.

Bemerkung: $\mathrm{Res} : H^q(G, A) \to H^q(U, A)$ kann man für alle $q \in \mathbb{Z}$ definieren (mit Dimensionsverschiebung)

Hier: $\mathrm{Res}_0 : A^G/N_G A \to A^U/N_U A$

$$a + N_G A \mapsto a + N_U A$$

<u>ZIEL:</u> $\mathrm{Kor}_q : H^q(U,A) \longrightarrow H^q(G,A), \ \forall q \in \mathbb{Z}$

<u>Beispiel:</u> $A = L^\times, L^+, I_L$, etc.

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ F \\ | \\ K \end{array} \quad U = \mathrm{Gal}(L/F), \ G = \mathrm{Gal}(L/K)$$

$$\begin{tikzcd} H^0(U, L^\times) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, "\mathrm{Kor}_0"] & F^\times / N_{L/F}(L^\times) \arrow[d, "N_{F/K}"] \\ H^0(G, L^\times) \arrow[r, phantom, "="] & K^\times / N_{L/K}(L^\times) \end{tikzcd}$$

<u>$q = -1$</u> $\quad H^{-1}(U,A) \xrightarrow{\mathrm{Kor}_{-1}} H^{-1}(G,A)$

$a \in {}_{N_U}A \quad a + I_U A \longmapsto a + I_G A$

<u>$q = 0$</u> $\quad A^U / N_U A \xrightarrow{\mathrm{Kor}_0} A^G / N_G A$

$a \in A^U \quad a + N_U A \longmapsto \underbrace{N_{G/U}\, a}_{\in a \in A^G} + N_G A$

Dies ist verträglich mit den Verbindungshomom.

Definition der Korestriktion:

Sei $U \leq G$. Unter der Korestriktion versteht man die eindeutig bestimmte Familie von Homom.

$$\mathrm{Kor}_q : H^q(U,A) \longrightarrow H^q(G,A), \ \forall q \in \mathbb{Z}$$

mit:

(1) $\mathrm{Kor}_0(a + N_U A) = N_{G/U}\, a + N_G A$

(2) Für jede exakte Sequenz von G-Moduln

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

kommutiert für alle $q \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
H^q(U,C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{Kor}_q"] & H^{q+1}(U,A) \arrow[d, "\mathrm{Kor}_{q+1}"] \\
H^q(G,C) \arrow[r, "\delta"] & H^q(G,A)
\end{tikzcd}$$

Beweisansatz: Konstruktion von Kor_q:

$$\begin{tikzcd}
H^0(G,A^q) \arrow[r, "\delta_G^q", "\simeq"'] & H^q(G,A) \\
H^0(U,A^q) \arrow[r, "\delta_U^q", "\simeq"'] \arrow[u, "\mathrm{Kor}_0"] & H^q(U,A) \arrow[u, dashed, "\mathrm{Kor}_q"']
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

<u>Satz:</u> $\mathrm{Kor}_q \circ \mathrm{Res}_q = (G:U)\,\mathrm{id} \quad , \forall q \in \mathbb{Z}$

<u>Bew:</u> Sei $\overline{a} = a + N_G A \in H^0(G,A)$, $a \in A^G$.

Dann:

$$\mathrm{Kor}_0 \left(\mathrm{Res}_0 (a + N_G A) \right) = \mathrm{Kor}_0 \left(a + N_U A \right)$$

$$= \underbrace{N_{G/U}\, a}_{(G:U)\, a} + N_G A = (G:U) \cdot (a + N_G A)$$

Betrachte

$$\begin{tikzcd}
H^0(G, A^q) \arrow[r, "\mathrm{Res}_0"] \arrow[d, "\delta^q", "\simeq"'] \arrow[rr, bend left, "(G:U)\,\mathrm{id}"] & H^0(U, A^q) \arrow[r, "\mathrm{Kor}_0"] \arrow[d, "\delta^q", "\simeq"'] & H^0(G, A^q) \arrow[d, "\delta^q", "\simeq"'] \\
H^q(G, A) \arrow[r, dashed, "\mathrm{Res}_q"] & H^q(U, A) \arrow[r, dashed, "\mathrm{Kor}_q"] & H^q(G, A)
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

Seien A, B G-Moduln und $f: A \to B$ ein G-Modulhomom. Dann induziert f einen Gruppenhomom.

$$f: H^q(G, A) \longrightarrow H^q(G, B)$$

Dazu: $A_q = A_{-q-1} = \{x : G^q \to A\}, q \geq 1$

Jedes x liefert eine q-Kokette in $B_q = B_{-q-1}$

$$f \circ x : G^q \to B.$$

Satz: Res und Kor sind funktoriell in folgendem Sinn: Für jeden G-Homom.

$$f: A \to B$$

ist

$$\begin{tikzcd}
H^q(G, A) \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}_q"'] & H^q(G, B) \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}_q"'] \\
H^q(U, A) \arrow[r, "f"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Kor}_q"'] & H^q(U, B) \arrow[u, shift right, "\mathrm{Kor}_q"']
\end{tikzcd}$$

kommutativ.

Beweis: Siehe Neukirch, Satz (4.15) ∎

Definition: Für eine Primzahl p sei $H^q(G, A)_p$ die p-Sylow-Untergruppe von $H^q(G, A)$. Man nennt dies den p-primären Teil.

Es gilt:

- $$H^q(G,A) = \bigoplus_{p \mid |G|} H^q(G,A)_p \ , \quad \text{da}$$
  $$|G| \cdot H^q(G,A) = 0.$$

- $$H^q(G,A)_p = \{ \bar{x} \in H^q(G,A) \mid \operatorname{ord}(\bar{x}) = p^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \}$$

- $$H^q(G,A)_p \cong H^q(G,A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \overset{\text{ü}}{\cong} H^q(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$$

betrachte $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ als $\mathbb{Z}_p[G]$-Modul. Starte hier mit der Standardauflösung von $\mathbb{Z}_p$. Beachte dazu

$$\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(-, A) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\underbrace{-}_{- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p}, A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$$

<u>Satz:</u> Sei A ein G-Modul und $G_p \leq G$ eine p-Sylow-Untergruppe. Dann gilt:

$$\mathrm{Res}: \quad H^q(G,A)_p \hookrightarrow H^q(G_p,A)$$

$$\mathrm{Kor}: \quad H^q(G_p,A) \twoheadrightarrow H^q(G,A)_p$$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{tikzcd}
 & & H^q(G,A) \\
H^q(G,A)_p \arrow[urr, "(G:G_p)\,\mathrm{id}"] \arrow[rr, "(G:G_p)\,\mathrm{id}", "\simeq"'] \arrow[dr, "\mathrm{Res}"'] & & H^q(G,A)_p \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] \\
 & H^q(G_p,A) \arrow[ur, "\mathrm{Kor}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Kor}: \quad H^q(G_p,A) \longrightarrow H^q(G,A)_p \,,$$

da $\quad |G_p| \; H^q(G_p,A)$

$\blacksquare$

<u>Folgerung:</u>

$$\left.\begin{array}{l} H^q(G_p,A) = 0 \,, \ \forall p \mid |G| \\ \text{und eine } p\text{-Sylow-U-gr.} \\ \quad G_p \leq G \end{array}\right\} \Longrightarrow H^q(G,A) = 0$$

$\blacksquare$

Shapiros Lemma

Def.: Sei $U \leq G$. Ein G-Modul A heißt **G/U-induziert**, falls es einen U-Modul D gibt, so daß

$$A = \bigoplus_{\sigma \in G/U} \sigma D$$

Beispiel: $\mathbb{Z}[G/U]$ ist ein G-Modul; die G-Wirkung ist gegeben durch: $g \cdot (g_1 U) := g g_1 U$.

Es gilt:

$$\mathbb{Z}[G/U] = \bigoplus_{\sigma \in G/U} \sigma \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[U]} \mathbb{Z}$$

Bemerkung: Die G/U-induzierten sind genau die Moduln $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[U]} X$ mit einem U-Modul X.

Explizit: Sei $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ ein VS von G/U.

Dann gilt: $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[U]} X = \bigoplus_{i=1}^{m} \sigma_i \otimes X$,

d.h. jedes Element hat eine eindeutige

Darstellung $\sum_{i=1}^{m} \sigma_i \otimes x_i \quad =: \lambda \in \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[U]} X$

Sei $\tau \in G$. Was ist $\tau\lambda$?

$$\underline{\underline{\tau\lambda}} = \sum_{i=1}^{m} \tau\sigma_i \otimes x_i = \underline{\underline{\sum_{i=1}^{m} \sigma_{\pi_\tau(i)} \otimes u_{\tau,i} x_i}}$$

$$\tau\sigma_i = \sigma_{\pi_\tau(i)} u_{\tau,i}, \quad \forall \tau \in G, \ i = 1, \dots, m$$

$$\pi_\tau : \{1, \dots, m\} \xrightarrow{\simeq} \{1, \dots, m\}$$

<u>Satz:</u> (Lemma von Shapiro)
Sei A ein G/U-induzierter Modul,

$$A = \bigoplus_{\sigma \in G/U} \sigma D = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[U]} D$$

mit einem U-Modul D. Dann gilt:

$$H^q(G, A) \simeq H^q(U, D), \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

Der Isomorphismus ist gegeben durch

$$H^q(G, A) \xrightarrow{\text{Res}} H^q(U, A) \xrightarrow{\bar{\pi}} H^q(U, D)$$

wobei $\pi : A \twoheadrightarrow D$ die Projektion auf die Komponente der 1 ist.

Beweisskizze:

"$q=0$" + Dimensionsverschiebung

Zu "$q=0$"

$$A^G/N_G A \xrightarrow{\operatorname{Res}_0} A^U/N_U A \xrightarrow{\overline{\pi}} D^U/N_U D$$

Betrachte $\nu: D^U/N_U D \longrightarrow A^G/N_G A$

$$d + N_U D \longmapsto \sum_{\sigma \in G/U} \sigma d + N_G A$$

Zeige (Übung): ν ist die inverse Abb. $\blacksquare$

Bemerkung:

- Für $U=1$ ergeben sich die G-induzierten Moduln
- Shapiro $\overset{U=1}{\Longrightarrow}$

$$H^q(G,A) \cong H^q(1,D) = 0$$

Beispiel: $L \,|\, K \,|\, \mathbb{Q}$, $L|K$ mit Gruppe G $\qquad I_L$ = gebrochene Ideale

$$\begin{array}{ccccc} L & \supseteq & \mathcal{O}_L & \supseteq & \mathfrak{P} \\ | & & & & | \\ K & \supseteq & \mathcal{O}_K & \supseteq & \mathfrak{p} \end{array}$$

Sei

$$I_L(\mathfrak{p}) := \left\{ \mathfrak{P}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{P}_r^{a_r} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

wobei $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = (\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r)^e$

Dann folgt aus dem Satz der eindeutigen Primidealzerlegung

- $$I_L = \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \triangleleft \mathcal{O}_K \\ \mathfrak{p} \neq (0)}} I_L(\mathfrak{p})$$

- $$I_L(\mathfrak{p}) \simeq \mathbb{Z}[G/G_{\mathfrak{P}}]$$ Iso. von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln
  $$\prod_\sigma \sigma(\mathfrak{P})^{a_\sigma} \longleftarrow \sum_\sigma a_\sigma \sigma$$

$$G_{\mathfrak{P}} = \{ \sigma \in G \mid \sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P} \}$$

<u>Dann:</u> $H^q(G, I_L) = \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^q(G, I_L(\mathfrak{p}))$

$$\cong \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^q(G, \mathbb{Z}[G/G_{\mathfrak{P}}]) \underset{\text{Shapiro}}{\simeq} \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^q(G_{\mathfrak{P}}, \mathbb{Z}) = \text{bekannt}$$

für $q \in \{-2, \dots, 2\}$