Vorlesung 12

3.6.2020

Wiederholung

A ist c.t., falls $H^q(U,A) = 0, \ \forall q \in \mathbb{Z}$
$\forall U \leq G$

Gezeigt:

A G-induziert $\Rightarrow$ A c.t.
Insbesondere ist $\mathbb{Z}[G]$ c.t. $\Longrightarrow$
alle projektiven $\mathbb{Z}[G]$-Moduln sind c.t.

Dimensionsverschiebung

$$0 \to I_G \otimes A \to \mathbb{Z}[G] \otimes A \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

$$0 \to A \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}[G] \otimes A \to J_G \otimes A \to 0$$

↑ induziert, also c.t.

$$\Rightarrow \quad \delta : H^{q-1}(G, J_G \otimes A) \xrightarrow{\sim} H^q(G, A)$$

$$\delta^{-1} : H^{q+1}(G, I_G \otimes A) \xrightarrow{\sim} H^q(G, A)$$

Setze: $A^m := \underbrace{J_G \otimes \dots \otimes J_G}_{m} \otimes A, \qquad m \geq 0$

$$A^m := \underbrace{I_G \otimes \dots \otimes I_G}_{|m|} \otimes A \qquad m \leq 0$$

Iteration $\Rightarrow$ $H^{q-m}(U, A^m) \xrightarrow[\delta^m]{\sim} H^q(U, A)$

Insbesondere: $H^0(\mathcal{U}, A^q) \xrightarrow[\delta^q]{\sim} H^q(\mathcal{U}, A)$

Anwendung: $|G| \, H^q(G, A) = 0, \quad \forall q \in \mathbb{Z}$

Konsequenz: A e-e $\Rightarrow |H^q(G, A)| < \infty$.

Satz: A habe uneingeschränkte und eindeutige Division $\Rightarrow$ A c.t.

Quelle: $n : H^q(\mathcal{U}, A) \xrightarrow{\sim} H^q(\mathcal{U}, A)$

Nimm $n = |G|$. ∎

Folgerung: $\left.\begin{array}{l} A \ \ m\text{-Torsion} \\ (m, |G|) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A$ c.t.

Beweis: Es genügt zu zeigen: $m H^q(\mathcal{U}, A) = 0$

Dazu: $H^q(G, A) = Z_q / B_q$ oE $\mathcal{U} = G$

$$Z_q \subseteq A_q = A_{-q-1}, \quad q \geq 1$$

$$A_q = \{x : G^q \to A\}, \quad (mx)(g_1, \dots, g_q)$$

$$= m \underbrace{x(g_1, \dots, g_q)}_{\in A} = 0$$

annulliert von m.

$$H^0(G, A) = A^G / N_G A$$

$$H^{-1}(G, A) = {}_{N_G}A / I_G A$$

∎

Bemerkung:

$$H^{-2}(G, \mathbb{Z}) \simeq G^{ab} = G/G'$$
$$H^{-1}(G, \mathbb{Z}) = 0$$
$$H^{0}(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z} \quad \checkmark$$
$$H^{1}(G, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}) = 0 \quad \checkmark$$
$$H^{2}(G, \mathbb{Z}) \simeq \hat{G} := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$$

Def: $\hat{G}$ heißt <u>Gruppe der abelschen Charaktere</u> von G.

Beweis: $0 \to I_G \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$

$$\Rightarrow H^{-2}(G, \mathbb{Z}) \simeq H^{-1}(G, I_G) = I_G/I_G^2 \overset{\text{ü}}{\simeq} G^{ab}$$

$$H^{-1}(G, \mathbb{Z}) = {}_{N_G}\mathbb{Z}/I_G\mathbb{Z} = 0, \text{ da } {}_{N_G}\mathbb{Z} = 0$$

$$0 \to \mathbb{Z} \to \underset{\uparrow \text{ c.t.}}{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

$$\Rightarrow H^{1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{H^2(G, \mathbb{Z})}}$$

$$\begin{matrix} \| \\ \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \simeq & \hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \\ f & \longmapsto & (\sigma \mapsto e^{2\pi i f(\sigma)}) \end{matrix}$$

Inflation, Restriktion und Korestriktion

ZIEL: $U \leq G$, A G-Modul

Studiere die Zusammenhänge zwischen

$$H^q(G/U, A^U) \xrightarrow{\mathrm{Inf}_q} H^q(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}_q} H^q(U, A)$$

$U \trianglelefteq G$ $\qquad$ $q \geq 1$.

Def.: Sei $U \trianglelefteq G$ und

$$x : G/U \times \dots \times G/U \longrightarrow A^U$$

Definiere

$$\begin{tikzcd} \mathrm{inf}(x) : G \times \dots \times G \arrow[r] \arrow[d] & A \\ G/U \times \dots \times G/U \arrow[r, "x"] & A^U \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \end{tikzcd}$$

Schreibweise: $\mathrm{inf}(x) = \mathrm{inf}^G_{G/U}(x)$

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (A^U)_q \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "\mathrm{inf}"] & (A^U)_{q+1} \arrow[d, "\mathrm{inf}"] \\ A_q \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & A_{q+1} \end{tikzcd}$$

kommutiert

Definition: Die induzierte Abbildung

$$\mathrm{Inf}_q : H^q(G/U, A^U) \longrightarrow H^q(G, A)$$

heißt Inflation.

Satz: Sei $U \trianglelefteq G$ und A ein G-Modul.

Dann ist

$$0 \to H^1(G/U, A^U) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(U, A)$$

exakt.

Beweis: Exaktheit bei $H^1(G/U, A^U)$:

Sei $\overline{x} \in H^1(G/U, A^U)$ mit $x : G/U \longrightarrow A^U$

und $\mathrm{Inf}(\bar{x}) = 0$, d.h.

$$\inf(x)(\sigma) = x(\sigma U) = \sigma a - a$$

für alle $\sigma \in G$ und ein $a \in A$.

Noch zu zeigen: $a \in A^U$

Dazu: Für $\tau \in U$ gilt

$$\sigma a - a = x(\sigma U) = x(\sigma\tau U) = \sigma\tau a - a$$

$\Rightarrow \sigma a = \sigma\tau a \quad , \quad \forall \sigma \in G, \ \tau \in U$

$\Longrightarrow \tau a = a \, , \ \forall \tau \in U \Rightarrow a \in A^U$

Exaktheit bei $H^1(G,A)$:

Sei $x : G/U \to A^U$ ein 1-Kozyklus.

Dann gilt für $\tau \in U$

$$\big(\mathrm{res}(\mathrm{inf}(x))\big)(\tau) = \mathrm{inf}(x)(\tau)$$
$$= x(\tau U) = x(U) = x(\bar{1}) = 0$$

denn: $x(\bar{1}) = x(\bar{1} \cdot 1) = x(\bar{1}) + x(\bar{1})$

$$x(\sigma\tau) = x(\sigma) + \sigma x(\tau)$$

Also: $\mathrm{im}(\mathrm{Inf}) \subseteq \ker(\mathrm{Res})$

Sei $x : G \to A$ ein 1-Kozyklus mit $\mathrm{Res}(\bar{x}) = 0$, d.h. es gibt $a \in A$ mit

$$x(\tau) = \tau a - a, \qquad \forall \tau \in U$$

Betrachte $\quad g : G \to A, \ \sigma \mapsto \sigma a - a$

klar: $g \in B_1(G,A)$.

Betrachte: $\quad x' := x - g$

Dann gilt:
- $\overline{x'} = \bar{x} \quad$ in $H^1(G,A)$
- $x'(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in U$

$$x'(\sigma\tau) = x'(\sigma) + \sigma x'(\tau) = x'(\sigma) \qquad (*)$$

$$x'(\tau\sigma) = x'(\tau) + \tau x'(\sigma) = \tau x'(\sigma) \qquad (**)$$

$\forall\ \sigma \in G,\ \tau \in U$

Definiere $y : G/U \longrightarrow A^U$

$$\sigma U \longmapsto x'(\sigma)$$

<u>klar:</u> $\inf(y) = x'$ bzw. $\overline{\inf(y)} = \overline{x'} = \overline{x}$

Noch zu zeigen: y ist wohldefiniert

Wegen $(*)$ ist y unabhängig von der Wahl von σ in σU. Ferner gilt für $\tau \in U$

$$\tau x'(\sigma) \overset{(**)}{=} x'(\tau\sigma) = x'(\sigma \underbrace{\sigma^{-1}\tau\sigma}_{\in U}) \overset{(*)}{=} x'(\sigma)$$

$\Rightarrow x'(\sigma) \in A^U$ ∎

<u>Satz:</u> Sei $U \trianglelefteq G$ und A ein G-Modul.
Sei $q \geq 1$ und

$$H^i(U, A) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, q-1.$$

Dann ist

$$0 \to H^q(G/U, A^U) \xrightarrow{\text{Inf}} H^q(G, A) \xrightarrow{\text{Res}} H^q(U, A)$$

exakt.

Beweis: Vollständige Induktion nach q

$q=1$ Vorheriger Satz

$q-1 \longrightarrow q$ $\quad 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}[G] \to J_G \to 0$

$$\Rightarrow \quad 0 \to A \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}[G]\otimes A}_{=:B} \longrightarrow \underbrace{J_G \otimes A}_{=:C} \to 0$$

ist exakt

G-induziert

$$\Rightarrow \quad 0 \to A^U \longrightarrow B^U \longrightarrow C^U \longrightarrow \underbrace{H^1(U,A)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \longrightarrow A^U \longrightarrow B^U \longrightarrow C^U \to 0$$

ist exakt

G/U-induziert

Betrachte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{q-1}(G/U, C^U) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, "\delta", "\cong"'] & H^{q-1}(G,C) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, "\delta", "\cong"'] & H^{q-1}(U,C) \arrow[d, "\delta", "\cong"'] \\
0 \arrow[r] & H^q(G/U, A^U) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] & H^q(G,A) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & H^q(U,A)
\end{tikzcd}$$

Das Diagramm kommutiert.

Zeige noch: $H^i(U,C)=0$ für $i=1,\dots,q-2$ $\leftarrow$

Dann ist nach IV die obere Sequenz exakt.

$$H^i(U,C) \overset{S}{\simeq} H^{i+1}(U,A) = 0 \quad \text{für } i=1,\dots,q-2$$

$\blacksquare$

<u>Bemerkung:</u> Man kann die Restriktion mittels Dimensionsverschiebung für alle $q \in \mathbb{Z}$ definieren. (siehe [Neu, Kap. I, Def. (4.8)])

Die Korestriktion

<u>Ziel:</u> Für $U \leq G$ konstruiere

$$H^q(U,A) \longrightarrow H^q(G,A), \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

<u>$q=-1$</u>

$$\begin{array}{ccc} H^{-1}(U,A) & \xrightarrow{\mathrm{Kor}_{-1}} & H^{-1}(G,A) \\ \| & & \| \\ {}_{N_U}A/I_U A & & {}_{N_G}A/I_G A \\ a + I_U A & \longmapsto & a + I_G A \end{array}$$

Wohldefiniert, da $I_U A \subseteq I_G A$

$$I_U = \langle \tau - 1 : \tau \in U \rangle_{\mathbb{Z}}$$
$$\cap$$
$$I_G = \langle \sigma - 1 : \sigma \in G \rangle_{\mathbb{Z}}$$

$q = 0$

$$H^0(U, A) \xrightarrow{\mathrm{Kor}_0} H^0(G, A)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$A^U / N_U A \qquad\qquad A^G / N_G A$$

$$a + N_U A \longmapsto N_{G/U}\, a + N_G A$$

wobei $N_{G/U} = \sum\limits_{\sigma} \sigma$, σ durchläuft ein VS von G/U. Beachte: $N_{G/U}\, a$ ist unabh. von der Wahl des VS.

<u>Lemma:</u> Sei $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ exakte Sequenz von G-Moduln. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} \bar{c} \in H^{-1}(U, C) & \xrightarrow{\delta} & H^0(U, A) \\ \downarrow \mathrm{Kor}_{-1} & & \downarrow \mathrm{Kor}_0 \\ H^{-1}(G, C) & \xrightarrow{\delta} & H^0(G, A) \end{array}$$

kommutativ.

<u>Beweis:</u> Sei $\bar{c} \in H^{-1}(\mathcal{U}, C) = {}_{N_{\mathcal{U}}}C \big/ I_{\mathcal{U}}C$.

Berechne $\mathrm{Kor}_0 \circ \delta$.

Betrachte

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_{-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & B_{-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & C_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r, "i"] & B_0 \arrow[r, "j"] & C_0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

wobei $A_{-1} = A_0 = A$, $\partial = N_{\mathcal{U}}$

Sei $b \in B_{-1} = B$ mit $j(b) = c$. Sei $a \in A_0$ mit $i(a) = \partial(b) = N_{\mathcal{U}} b$.

Dann gilt: $\delta(\bar{c}) = \bar{a} = a + N_{\mathcal{U}} A$.

$$\Rightarrow \mathrm{Kor}_0(\delta(\bar{c})) = \underline{\underline{N_{G/\mathcal{U}}\, a + N_G A}}$$

Ferner gilt: $\delta(\mathrm{Kor}_{-1}(\bar{c})) = \delta(c + I_G C)$

Betrachte $(*)$ mit $\partial = N_G$. Es folgt:

$$\underline{\underline{\partial b}} = N_G b = N_{\mathcal{U}} N_{G/\mathcal{U}} b = N_{G/\mathcal{U}}(i(a)) = i(\underline{N_{G/\mathcal{U}}}(a))$$

$$= i(N_{G/\mathcal{U}}(a)) \Rightarrow \delta(\mathrm{Kor}_{-1}(\bar{c})) = \underline{\underline{N_{G/\mathcal{U}}\, a + N_G A}}.$$

∎