Vorlesung 11

27.5.2020

Ziel: Hinreichende Bedingungen an einen G-Modul A, so daß

$$H^q(U, A) = 0, \quad \forall q \in \mathbb{Z} \quad \forall U \leq G \qquad (*)$$

Sprechweise: A ist kohomologisch trivial (c.t.), falls $(*)$ erfüllt ist.

z.B.: a) A $\mathbb{Z}[G]$-projektiv $\Rightarrow$ A ist c.t.

Quelle: $\mathbb{Z}[G]$ ist c.t.

b) A ist G-induziert $\Rightarrow$ A c.t.

c) A mit eindeutiger und uneingeschränkter Division (z.B. $A = \mathbb{Q}$) $\Rightarrow$ A c.t.

G-induzierte Moduln

Def.: Ein G-Modul A heißt G-induziert, falls es eine U'gr $D \leq A$ gibt, so daß

$$A = \bigoplus_{\sigma \in G} \sigma D .$$

D.h. jedes $a \in A$ hat eine eindeutige

Darstellung

$$a = \sum_{\sigma\in G} \sigma d_\sigma \quad , \quad d_\sigma \in D .$$

<u>Beispiel:</u>

$$\mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{\sigma\in G} \sigma \mathbb{Z} \qquad (\text{hier } D = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[G])$$

<u>Satz:</u> Sei $A = \bigoplus_{\sigma\in G} \sigma D$ G-induziert und $H \leq G$. Dann ist A auch H-induziert. Falls $H \trianglelefteq G$, so ist A^H ein G/H-Modul und A^H ist G/H-induziert.

<u>Beweis:</u>

$$A = \bigoplus_{\tau \in H\backslash G} \bigoplus_{\sigma\in H} \sigma\tau D = \bigoplus_{\sigma\in H} \sigma \left(\bigoplus_{\tau\in H\backslash G} \tau D \right)$$

Sei $H \trianglelefteq G$.

<u>Beh:</u) $A^H = \bigoplus_{\tau \in G/H} \tau (N_H D)$ $\quad$ ($\Rightarrow$ Satz)

<u>Bew:</u> Die Summe ist direkt, <u>denn</u>:

$$\tau N_H D \subseteq \bigoplus_{\sigma\in H} \tau\sigma D$$

$$\tau N_H d = \sum_{\sigma\in H} \tau\sigma d$$

„$\supseteq$" Sei $\tau N_H d \in \tau N_H D$ und $h \in H$.

Dann gilt: $\underline{\underline{h\tau N_H d}} = \tau \underbrace{\underbrace{(\tau^{-1} h \tau)}_{\in H} N_H}_{= N_H} d = \underline{\underline{\tau N_H d}}$.

„$\subseteq$" Sei $a \in A^H$. Sei

$$a = \sum_{\tau \in G} \tau d_\tau$$ mit eindeutigen $d_\tau \in D$.

Sei $\sigma \in H$. Dann gilt:

$$\sum_{\tau \in G} \sigma\tau d_{\sigma\tau} = a = \sigma a = \sum_{\tau \in G} \sigma\tau d_\tau$$

$$\Rightarrow d_{\sigma\tau} = d_\tau, \ \forall \sigma \in H, \ \forall \tau \in G$$

$$\Rightarrow a = \sum_{\tau \in G/H} \sum_{\sigma \in H} \tau\sigma d_{\tau\sigma}$$

$$= \sum_\tau \tau \sum_\sigma \sigma d_{(\tau\sigma\tau^{-1})\tau}$$

$$= \sum_\tau \tau \underbrace{\left(\sum_\sigma \sigma\right)}_{= N_H} d_\tau \quad \in \text{r.S.} \quad \blacksquare$$

Satz: Sei $X = \bigoplus_{\sigma \in G} \sigma D$ G-induziert und A ein G-Modul. Dann ist $X \otimes A$ G-induziert.

Beweis: $X \otimes A = \left(\bigoplus_{\sigma \in G} \sigma D \right) \otimes A$

$$= \bigoplus_{\sigma \in G} \left(\sigma D \otimes \sigma A \right) = \bigoplus_{\sigma \in G} \sigma \underbrace{(D \otimes A)}_{\text{neues } D} \qquad \blacksquare$$

Bemerkung:

$$\boxed{x = \sum_{\sigma \in G} \sigma d_\sigma}$$

$$x \otimes a = \sum_\sigma \sigma d_\sigma \otimes a$$

$$= \sum_\sigma \sigma d_\sigma \otimes \sigma \sigma^{-1} a$$

$$= \sum_\sigma \sigma \left(d_\sigma \otimes \sigma^{-1} a \right)$$

$\tau \in G$

$$\Rightarrow \quad \tau (x \otimes a) = \tau x \otimes \tau a$$

$$= \sum_\sigma \tau \sigma d_\sigma \otimes \tau a$$

$\lambda = \tau \sigma$

$\sigma = \tau^{-1} \lambda$

$$= \sum_\sigma \tau \sigma \left(d_\sigma \otimes \sigma^{-1} a \right)$$

$$= \tau \sum_\sigma \sigma \left(d_\sigma \otimes \sigma^{-1} a \right)$$

$\blacksquare$

Satz: A G-induziert $\Longrightarrow$ A ist c.t.

(Insbesondere ist $\mathbb{Z}[G]$ c.t.)

Bew: oE sei $G = U$.

Zu zeigen:

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_G(X_q, A)}_{A_q} \xrightarrow{\partial_{q+1}} \underbrace{\mathrm{Hom}_G(X_{q+1}, A)}_{A_{q+1}} \longrightarrow \cdots$$

ist exakt.

Sei $A = \bigoplus_{\sigma \in G} \sigma D$ und $\pi : A \longrightarrow D$

$$\sum_\sigma \sigma d_\sigma \longmapsto d_1$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(X_q, A) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_q, D) \\ f &\longmapsto \pi \circ f \\ \left(x \xmapsto{f_h} \sum_{\sigma \in G} \sigma^{-1} \underbrace{h(\sigma x)}_{\in D}\right) &\longleftarrow\!\shortmid \quad h \end{aligned}$$

ein Isom.

Dazu ist zu zeigen: a) f_h ist G-verträglich

b) $f(x) = \sum_{\sigma \in G} \sigma^{-1} (\pi \circ f)(\sigma(x))$ c) $\pi \circ f_h = h$ ✓

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(X_q, A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_G(X_{q+1}, A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_q, D) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{q+1}, D) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

$$f \mapsto f \circ \delta_{q+1}, \qquad \pi \circ f \mapsto \pi \circ f \circ \delta_{q+1}$$

Die untere Zeile ist exakt, da X_q $\mathbb{Z}[G]$-frei ist und

$$\cdots \leftarrow X_q \xleftarrow{\delta_{q+1}} X_{q+1} \leftarrow \cdots$$

exakt.

<u>Zu b)</u> Sei $f(x) = \sum_{\tau \in G} \tau d_\tau$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in G} \sigma^{-1} (\pi \circ f)(\sigma x) &= \sum_{\sigma} \sigma^{-1} \big(\pi\, f(\sigma x) \big) \\
&= \sum_{\sigma} \sigma^{-1} \big(\pi\, \sigma f(x) \big) \\
&= \sum_{\sigma} \sigma^{-1} \Big(\pi \Big(\sigma \sum_{\tau} \tau d_\tau \Big) \Big) \\
&= \sum_{\sigma} \sigma^{-1} \Big(\pi \Big(\sum_{\tau} \sigma \tau d_\tau \Big) \Big) \\
&= \sum_{\sigma} \sigma^{-1} d_{\sigma^{-1}} = f(x).
\end{aligned}
$$

a) Übung. $\blacksquare$

Betrachte

$$0 \to I_G \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$
$$\sigma \mapsto 1$$

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}[G] \to J_G \to 0$$
$$1 \mapsto N_G$$

Sei A ein G-Modul $\Longrightarrow$

$$0 \to I_G \otimes A \to \mathbb{Z}[G] \otimes A \to A \to 0$$

$$0 \to A \to \mathbb{Z}[G] \otimes A \to J_G \otimes A \to 0$$

sind exakt.

ist G-induziert, also c.t.

Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert Isom.

$$\delta : H^{q-1}(G, J_G \otimes A) \xrightarrow{\cong} H^q(G, A)$$

$$\delta^{-1} : H^{q+1}(G, I_G \otimes A) \xrightarrow{\cong} H^q(G, A)$$

Dies haben wir auch für alle $U \leq G$.

Def.:

$$A^m := \underbrace{J_G \otimes \dots \otimes J_G}_{m} \otimes A \,, \qquad m \geq 0$$

$$A^m := \underbrace{I_G \otimes \dots \otimes I_G}_{|m|} \otimes A \,, \qquad m \leq 0$$

Sei $m \geq 0$.

$$\begin{tikzcd} H^{q-m}(U, A^m) \arrow[r, "\delta"] \arrow[rrr, bend right, "\simeq" description, "\delta^m"'] & H^{q-m+1}(U, A^{m-1}) \arrow[r] & \dots \arrow[r] & H^q(U, A) \end{tikzcd}$$

Sei $m \leq 0$:

$$\begin{tikzcd} H^{q-m}(U, A^m) \arrow[r, "\delta^{-1}"] \arrow[rrr, bend right, "\simeq" description, "\delta^m"'] & H^{q-m-1}(U, A^{m+1}) \arrow[r, "\delta^{-1}"] & \dots & H^q(U, A) \end{tikzcd}$$

Anwendung: <u>Satz:</u> $|G| \, H^q(G, A) = 0, \ \forall q \in \mathbb{Z}$

Beweis: Sei C beliebig.

Dann gilt: $|G| \hat{H}^0(G,C) = 0$, denn:

$$\hat{H}^0(G,C) = C^G / N_G C \ni c + N_G C, \; c \in C^G$$

und $$|G| (c + N_G C) = |G| c + N_G C$$

$$= N_G c + N_G C = 0.$$

Sei nun $C = A^q$. Dann gilt mit $m = q$

$$\delta^q : \hat{H}^0(G, A^q) \xrightarrow{\simeq} \hat{H}^q(G,A)$$

$\Rightarrow |G| \hat{H}^q(G,A) = 0$ ∎

Folgerung: A e-e $\Rightarrow |\hat{H}^q(G,A)| < \infty$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Beweis:

$$A_q = \mathrm{Hom}_G(X_q, A) \simeq \bigoplus_{\text{endl.}} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G], A)$$

$\uparrow$ e-e freier $\mathbb{Z}[G]$-Modul

$$\simeq \bigoplus_{\text{endl.}} A$$

ist e-e $/\mathbb{Z}$

$\Rightarrow Z_q(A)$ e-e $/\mathbb{Z}$ $\Rightarrow \hat{H}^q(G,A) = \underbrace{Z_q(A) / B_q(A)}_{\text{e-e}}$

Da $|G|$ $H^q(G,A)$ annulliert, ist $H^q(G,A)$ endlich. ∎

<u>Def.:</u> Sei A eine abelsche Gruppe. Dann hat A <u>uneingeschränkte und eindeutige Division</u>, falls es für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in A$ genau ein $a_1 \in A$ gibt mit $na_1 = a$.

<u>Beispiele:</u> (1) $\mathbb{Q}$ hat eindeutige und uneingeschränkte Division

(2) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ hat uneingeschränkte Division, aber

$$0 \to \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

ist exakt.

<u>Satz:</u> A habe uneingeschränkte und eindeutige Division $\Longrightarrow$ A ist c.b.

<u>Bew:</u> Sei

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow[\cong]{n} A \\ a &\longmapsto na \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad H^q(G,A) \xrightarrow[\simeq]{\cdot n} H^q(G,A)$$

$$\Longrightarrow \quad H^q(G,A) \simeq n\, H^q(G,A)$$

Wähle $n = |G| \Longrightarrow H^q(G,A) \simeq \underset{\overset{\|}{0}}{|G|\, H^q(G,A)}$ $\blacksquare$

<u>Beispiele:</u>

1) $\mathbb{Q}$ ist c.t.

2) $0 \to \mathbb{Z} \to \underset{\uparrow \text{ c.t}}{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$

$$\Longrightarrow \quad H^{q-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq H^q(G, \mathbb{Z})$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{H^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \simeq H^0(G, \mathbb{Z}) = \underline{\mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}}.$$