Vorlesung 10

25.5.2020

Wiederholung

$$A_q = A_{-q-1} = \{x : G^q \to A\}, \quad q \geq 1$$

$$A_0 = A_{-1} = A$$

$$\cdots \to A_{-2} \xrightarrow{\partial_{-1}} A_{-1} \xrightarrow{\partial_0} A_0 \xrightarrow{\partial_1} A_1 \xrightarrow{\partial_2} \cdots$$

$$\ker(\partial_{q+1}) =: Z_q, \quad \operatorname{im}(\partial_q) =: B_q$$

Def.: $$H^q(G,A) := Z_q / B_q$$

Explizit:

$$H^{-1}(G,A) = {}_{N_G}A / I_G A, \quad H^0(G,A) = A^G / N_G A$$

$$H^1(G,A) = \frac{\{x : G \to A \mid x(\sigma\tau) = \sigma x(\tau) + x(\sigma),\ \forall \sigma,\tau\}}{\{x : G \to A \mid \exists a \in A : x(\sigma) = \sigma(a) - a\}}$$

Satz: $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$ exakt

$\Rightarrow$

$$\cdots \to H^q(G,A) \xrightarrow{i_q} H^q(G,B) \xrightarrow{j_q} H^q(G,C) \xrightarrow{\delta_q} H^{q+1}(G,A)$$

$$\downarrow$$

$$\vdots$$

Beweis: Existenz von δ_q ist bereits gezeigt.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A_{q-1} & \xrightarrow{i_{q-1}} & B_{q-1} & \xrightarrow{j_{q-1}} & C_{q-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow \partial_q & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A_q & \xrightarrow{i_q} & B_q & \xrightarrow{j_q} & C_q & \to & 0 \\
 & & \downarrow \partial_{q+1} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A_{q+1} & \xrightarrow{i_{q+1}} & B_{q+1} & \xrightarrow{j_{q+1}} & C_{q+1} & \to & 0
\end{array}$$

<u>Zur Exaktheit bei $H^q(G,C)$:</u>

$$H^q(G,B) \xrightarrow{\bar{j}_q} H^q(G,C) \xrightarrow{\delta_q} H^{q+1}(G,A)$$

<u>Zu $\mathrm{im}(\bar{j}_q) \subseteq \ker(\delta_q)$:</u> Folgt aus der Konstruktion.

<u>Zu $\ker(\delta_q) \subseteq \mathrm{im}(\bar{j}_q)$:</u> Sei $\delta_q(\bar{c}_q) = 0$.

Dann gilt: $\exists\, a_{q+1}, b_q$

$$\delta_q(\bar{c}_q) = \overline{a_{q+1}} = 0, \quad j_q(b_q) = c_q$$

$$i_{q+1}(a_{q+1}) = \partial_{q+1}(b_q)$$

$$\Rightarrow a_{q+1} = \partial_{q+1}(a_q) \Rightarrow$$

$$\partial_{q+1}(b_q) = i_{q+1}(a_{q+1}) = i_{q+1}(\partial_{q+1}(a_q)) = \partial_{q+1}(i_q(a_q))$$

$$\Rightarrow \partial_{q+1}(b_q - i_q(a_q)) = 0 \quad , \text{ d.h.}$$

$$b_q - i_q(a_q) \in Z_q(B)$$

Ferner gilt:

$$c_q = j_q(b_q - i_q(a_q)) .$$

$$\Rightarrow \overline{c_q} = \overline{b_q - i_q(a_q)}$$

Rest des Beweises als Übung ■

<u>Folgerung:</u> Falls $H^q(G,A)=0$ (bzw. $H^q(G,B)=0$ bzw. $H^q(G,C)=0$) für alle $q\in\mathbb{Z}$, so erhält man Isom.

$$\overline{j_q} : H^q(G,B) \xrightarrow{\simeq} H^q(G,C), \; \forall q\in\mathbb{Z}$$

bzw. ....

Satz: Sei

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutativ mit exakten Zeilen. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & H^q(G,C) \arrow[r, "\delta_q"] \arrow[d, "h_q"] & H^{q+1}(G,A) \arrow[r] \arrow[d, "f_q"] & {} \\ \arrow[r] & H^q(G,C') \arrow[r, "\delta_q"] & H^{q+1}(G,A') \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Beweis: Folgt aus der Konstruktion von δ_q. ■

Satz: Sei

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "i'"] & A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "i"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "i''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "j'"] & B \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "j"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "j''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "h_1"] \arrow[d] & C \arrow[r, "h_2"] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

ein komm. Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten.

$$\begin{tikzcd}
H^{q-1}(G,C'') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] & H^q(G,C') \arrow[d, "-\delta"] \\
H^q(G,A'') \arrow[r, "\delta"] & H^{q+1}(G,A')
\end{tikzcd}$$

Beweis: Sei

$$D := \ker(B \xrightarrow{g_2} B'' \xrightarrow{j''} C'')$$
$$= \ker(B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{h_2} C'')$$

Dann ist

$$0 \to D \overset{\subseteq}{\to} B \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Sei

$$I: A' \longrightarrow A \oplus B'$$
$$a' \longmapsto (f_1(a'), i'(a'))$$

$$J: A \oplus B' \longrightarrow D \subseteq B$$
$$(a, b') \longmapsto i(a) - g_1(b')$$

<u>Beh 1:</u> Die Sequenz

$$0 \to A' \xrightarrow{I} A \oplus B' \xrightarrow{J} D \to 0$$

ist exakt.

<u>Bew:</u> <u>Bei D:</u> Sei $b \in D$. Dann ist

$j''(g_2(b)) = 0 \Rightarrow \exists!\, a'' \in A'' : i''(a'') = g_2(b)$

Sei $a \in A$ mit $f_2(a) = a''$. Dann gilt:

$$g_2(i(a)) = i''(f_2(a)) = i''(a'') = g_2(b)$$

$\Rightarrow i(a) - b \in \ker(g_2) = \operatorname{im}(g_1)$

$\Rightarrow \exists!\, b' \in B' : g_1(b') = i(a) - b \Rightarrow b = i(a) - g_1(b')$

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "i'"] & A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "i"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "i''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "j'"] & B \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "j"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "j''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "h_1"] \arrow[d] & C \arrow[r, "h_2"] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Exaktheit bei $A \oplus B'$

$$J(I(a')) = J((f_1(a'), i'(a'))) = i(f_1(a')) - g_1(i'(a')) = 0$$

Sei $(a, b') \in \ker(J)$. Dann gilt:

$$i(a) = g_1(b').$$

Ferner gilt: $i''(f_2(a)) = g_2(i(a)) = g_2(g_1(b')) = 0$

$\Rightarrow f_2(a) = 0 \Rightarrow \exists!\, a' \in A' : f_1(a') = a$. Noch zu zeigen: $i'(a') = b'$. Dazu betrachte:

$$g_1(i'(a')) = i(f_1(a')) = i(a) = g_1(b').$$

$\Rightarrow i'(a') = b'$.

Exaktheit bei A' ist klar.

<u>Beh 2:</u>

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "f_1"] & A \arrow[r, "f_2"] & A'' \arrow[r, "i''"] & B'' \arrow[r, "j''"] & C'' \\
A' \arrow[u, "id"] \arrow[d, "-id"'] \arrow[r, "I"] & A \oplus B' \arrow[u, "{(id,0)}"'] \arrow[d, "{(0,-id)}"'] \arrow[r, "J"] & D \arrow[u, dashed, "①"'] \arrow[d, dashed, "②"'] \arrow[r, "\subseteq"] & B \arrow[u, "f_2"'] \arrow[d, "j"'] \arrow[r, "j'' \circ f_2"] & C'' \arrow[u, "id"'] \arrow[d, "id"'] \\
A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' \arrow[r, "h_1"] & C \arrow[r, "h_2"] & C''
\end{tikzcd}$$

$x \mapsto d$

kommutiert. <u>Bew:</u> Einfache Verifikation.

<u>Beh 3</u> Man kann das Diagramm kann vervollständigen.

<u>Beweis:</u> Existenz von ① folgt aus der Surjektivität von J + Verifikation der Wohldefiniertheit.

Def. von ② ähnlich.

$$\begin{tikzcd}
H^{q-1}(G,C'') \arrow[r] & H^q(G,A'') \arrow[r] & H^{q+1}(G,A') \\
H^{q-1}(G,C'') \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] \arrow[r] & H^q(G,D) \arrow[u, "①"] \arrow[d, "②"] \arrow[r] & H^{q+1}(G,A') \arrow[u, equal] \arrow[d, "-id"] \\
H^{q-1}(G,C'') \arrow[r] & H^q(G,C') \arrow[r] & H^{q+1}(G,A')
\end{tikzcd}$$

■

Satz: Sei $\{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von G-Moduln. Dann gilt:

$$H^q(G, \underbrace{\bigoplus_{i\in I} A_i}_{=:A}) \simeq \bigoplus_{i\in I} H^q(G, A_i)$$

$$H^q(G, \prod_{i\in I} A_i) \simeq \prod_{i\in I} H^q(G, A_i)$$

Bew: Für $\bigoplus$:

$$A = \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i = 0 \text{ f.f.a. } i \in I\}$$

Es ist

$$A_q = \mathrm{Hom}_G(X_q, A) \simeq \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_G(X_q, A_i) = \bigoplus_{i\in I} (A_i)_q$$

$$f \longmapsto (\pi_i \circ f)_{i\in I}$$

$$\Big(x \longmapsto \sum_{i\in I} f_i(x)\Big) \longleftarrow\!\!| \quad (f_i)_{i\in I}$$

dies ist wohldefiniert, da die X_q e-e sind

($x_1, \dots, x_m$ seien Erzeugende / $\mathbb{Z}[G]$

$\Rightarrow f(x_j)$ hat nur endlich viele Komponenten $\pi_i(f(x_j)) \neq 0$, da A eine direkte Summe ist.)

Man erhält:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A_q \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I} (A_i)_{q-1} \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I} (A_i)_q \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I} (A_i)_{q+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Die Beh. für $\prod$ geht analog. $\blacksquare$

<u>Anwendung:</u> Wir werden zeigen:

$$H^q(G, \mathbb{Z}[G]) = 0, \quad \forall q \in \mathbb{Z}.$$

$$\Longrightarrow \quad H^q\Big(G, \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}[G]\Big) = 0, \quad \forall q \in \mathbb{Z}$$

Sei nun P $\mathbb{Z}[G]$-projektiv $\Longrightarrow$

$$\exists Q : \quad P \oplus Q \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}[G]$$

$$\begin{array}{rcl}
\Longrightarrow \quad H^q(G, P\oplus Q) & \cong & H^q\Big(G, \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}[G]\Big) = 0 \\
\| & & \\
H^q(G, P) \oplus H^q(G, Q) & & \Rightarrow \quad \underline{\underline{H^q(G, P) = 0}}
\end{array}$$