Übung 9

9.7.2020

Aufgabe 1) $\quad \underbrace{\mathbb{Z} \subseteq \hat{\mathbb{Z}}}_{\text{dicht}} = G \quad , \quad G_n = n\hat{\mathbb{Z}}$

A stetiger G-Modul

$$1 \longmapsto F$$
$$n \longmapsto F^n$$

c) Gezeigt: $\quad \forall a \in A \; \exists n \in \mathbb{N} : \; F^n a = a$

d.h. $\quad F^n \in G_a = \{ \sigma \in G \mid \sigma a = a \}$

d) Notation: $\quad N_n := 1 + F + \dots + F^{n-1}$

$$= \frac{F^n - 1}{F - 1}$$

bzw. $\quad (F-1) N_n = F^n - 1$

$$A' := \{ a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : \; N_n a = 0 \}$$

$$H^q(G, A) := \varinjlim H^q(\underbrace{G/G_n}_{\simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, A^{G_n})$$

Nach zu zeigen:

$$H^1(G, A) \simeq A' / (F-1)A$$

1. Schritt:

$n \mid m$

$$\begin{tikzcd}
H^1(G/G_n, A^{G_n}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \hat{H}^{-1}(G/G_n, A^{G_n}) \arrow[d] \\
H^1(G/G_m, A^{G_m}) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \hat{H}^{-1}(G/G_m, A^{G_m})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\bar{x} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \overline{x(FG_n)} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
\bar{y} \arrow[r, mapsto] & \overline{y(FG_m)}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\langle F G_n\rangle = G/G_n \arrow[r, "x"] & A^{G_n} \arrow[d, "\subseteq"] \\
\langle F G_m\rangle = G/G_m \arrow[u] \arrow[r, dashed, "y"] & A^{G_m}
\end{tikzcd}$$

$$n \mid m \;\Downarrow\; G_m \subseteq G_n \;\Downarrow\; A^{G_n} \subseteq A^{G_m}$$

Also ist zu zeigen:

$$\varinjlim_n \, {}_{N_n}A^{G_n} / (F-1)A^{G_n} \simeq A' / (F-1)A \quad (*)$$

Der induktive Limes ist gebildet bez.

$$\begin{tikzcd}
(F-1)A^{G_n} \arrow[d, "\subseteq"'] & \subseteq & (F-1)A^{G_m} \arrow[d, "\subseteq"] \\
{}_{N_n}A^{G_n} \arrow[d, Rightarrow] & \subseteq & {}_{N_m}A^{G_m} \arrow[d, Rightarrow] \\
{}_{N_n}A^{G_n} / (F-1)A^{G_n} \arrow[rr] & & {}_{N_m}A^{G_m} / (F-1)A^{G_m}
\end{tikzcd}$$

Dazu sollte man zeigen:

- $(F-1)A^{G_n} \subseteq {}_{N_n}A^{G_n}$

•• ${}_{N_n}A^{G_n} \subseteq {}_{N_m}A^{G_m}$

Zu $\bullet$: $F^n \in G_n$

Sei $a \in A^{G_n} \Rightarrow F^n a = a$

$$\Rightarrow 0 = \frac{F^n - 1}{F-1}(F-1)a = N_n (F-1) a$$

$$\Rightarrow (F-1) A^{G_n} \subseteq \ker(N_n)$$

Zu $\bullet\bullet$ $m = nd$

$$\Rightarrow \frac{F^m - 1}{F^n - 1} = 1 + F^n + \dots + F^{n(d-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{F^m - 1}{F-1} = \frac{(F^n - 1)}{F-1}(1 + \dots + F^{n(d-1)})$$

$$\Rightarrow N_m = N_n (1 + \dots + F^{n(d-1)})$$

$$\Rightarrow {}_{N_n}A^{G_n} \subseteq {}_{N_m}A^{G_m}$$

Zur Wohldefiniertheit der rechten Seite in $(*)$:

Sei $a \in A \Rightarrow \exists n : F^n a = a$

$$\Rightarrow 0 = (F^n - 1) a = N_n (F-1) a$$

$$\Rightarrow (F-1) A \subseteq A'$$

Betrachte

$$\varinjlim_n {}_{N_n}A^{G_n} / (F-1)A^{G_n} \xrightarrow{\varphi} A' / (F-1)A$$

$$a + (F-1)A^{G_n} \longmapsto a + (F-1)A$$

$$a \in {}_{N_n}A^{G_n}$$

<u>Wohldefiniertheit von φ:</u>

$$\left.\begin{array}{ll} a + (F-1)A^{G_n} \sim & b + (F-1)A^{G_m} \\ a \in {}_{N_n}A^{G_n} & b \in {}_{N_m}A^{G_m} \end{array}\right\} (**)$$

z.z. $a + (F-1)A = b + (F-1)A$

$(**) \iff \exists$ Vielfaches l von n und m mit

$$a + (F-1)A^{G_l} = b + (F-1)A^{G_l}$$

Insbesondere gilt also:

$$a \equiv b \pmod{(F-1)A}$$

Definiere $\psi : A' / (F-1)A \longrightarrow \varinjlim_n {}_{N_n}A^{G_n} / (F-1)A$

$a + (F-1)A \longmapsto a + (F-1)A$, falls $N_n a = 0$ und $a \in A^{G_n}$

Wohldefiniertheit von Ψ: Betrachte zunächst

$$A' \xrightarrow{\Psi'} \varinjlim_n N_n A^{G_n} \Big/ (F-1)A^{G_n}$$

wie eben.

Sei $N_n a = 0$ und $N_m a = 0$

z.z. $a + (F-1)A^{G_n} \sim a + (F-1)^{G_m}$

Sei dazu $m, n \mid l$. z.z.

$$a + (F-1)A^{G_l} = a + (F-1)A^{G_l} \checkmark$$

Zeige nun: $(F-1)A \subseteq \ker(\Psi')$

Sei dazu $a \in A$ und $F^n a = a$

Sei zusätzlich $a \in A^{G_m}$ (Stetigkeit) $\Big\} \Longrightarrow$

für $n, n \mid l$ gilt: $F^l a = a$ & $a \in A^{G_l}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \underbrace{N_l (F-1)}_{F^l - 1} a = \underbrace{(F-1) \underbrace{N_l a}_{\in A^{G_l}}}_{\in (F-1) A^{G_l}}$$

$$\cap \text{I}$$

$$(F-1)A$$

Zu $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$:

$$(\varphi \circ \psi)\big(a + (F-1)A\big) = \varphi\big(a + (F-1)A^{G_n}\big)$$

$a \in A'$ $\qquad\qquad$ $N_n a = 0$, $a \in A^{G_n}$

$$= a + (F-1)A$$

Zu $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$:

$$(\psi \circ \varphi)\big(a + (F-1)A^{G_n}\big) = \psi\big(a + (F-1)A\big)$$

$a \in {}_{N_n}A^{G_n}$ $\qquad$ $= a + (F-1)A^{G_n}$

[redacted]

Aufgabe 2) $\quad$ Zeige: $(K^\times)^m \leq K^\times$ ist eine offene Untergruppe

K

$| < \infty$

$\mathbb{Q}_p$ $\quad$ Bew: siehe Ü 2

Aufgabe 3) $\quad$ Zeige: $N_{L|K}(L^\times) \leq K^\times$ ist offen von endlichem Index

Beweis: Sei $\alpha = N_{L|K}(\beta) \in N_{L|K}(L^\times)$.

klar: $N_{L|K}(K^\times) = (K^\times)^m$, $\quad m = [L:K]$

$\Rightarrow \alpha (K^\times)^m \subseteq N_{L|K}(L^\times)$ ist eine offene Umgebung von α.

Zur Endlichkeit: Wegen

$$(K^\times)^m \leq N_{L|K}(L^\times) \leq K^\times$$

reicht es zu zeigen: $[K^\times : (K^\times)^m] < \infty$

siehe Ü 2.

$\blacksquare$