Übung 8

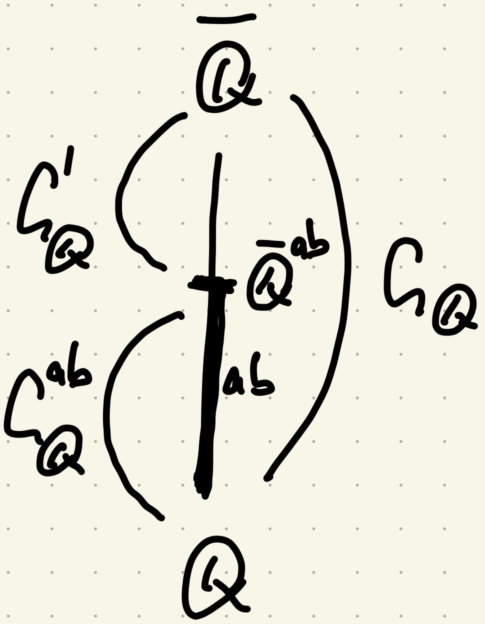
2.7.2020

Aufgabe 1) Local Fields, Serre

$\overline{X}$, §1, Prop. 2

Aufgabe 2)

Aufgabe 3)



z.z. $G^{ab}_{\mathbb{Q}} \simeq \hat{\mathbb{Z}}^{\times} := \varprojlim_m (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$

Hinweis: $n \mid m$, dann

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
$$z + m\mathbb{Z} \longmapsto z + n\mathbb{Z}$$

Es gilt: $G_{\mathbb{Q}}/H$ ab. $\Leftrightarrow G'_{\mathbb{Q}} \subseteq H$

Also: $\overline{\mathbb{Q}}^{G'_{\mathbb{Q}}} = \overline{\mathbb{Q}}^{ab}$

$= $ max. abelsche Teilerweiterung von $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$

Also ist zu zeigen:

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}^{ab}/\mathbb{Q}) \simeq \hat{\mathbb{Z}}^{\times}$$

Kronecker-Weber: $\overline{\mathbb{Q}}^{ab} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}(\zeta_n)$

Also: $\quad \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}^{ab}/\mathbb{Q}) = \varprojlim_n \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)|\mathbb{Q})$

$$\left(\text{eigentlich } \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}^{ab}/\mathbb{Q}) = \varprojlim_{K|\mathbb{Q} \text{ ab.}} \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})\right)$$

weil
$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}(\zeta_n) \\ | \\ K \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

Da

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)|\mathbb{Q}) \arrow[r, "\simeq"] & \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times \\
\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)|\mathbb{Q}) \arrow[u, "\mathrm{res}"] \arrow[r, "\simeq"] & \left(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\right)^\times \arrow[u]
\end{tikzcd} \qquad n \mid m$$

$$(\zeta_n \mapsto \zeta_n^a) \leftarrow\!\shortmid\, a + n\mathbb{Z}$$
$$(\zeta_m \mapsto \zeta_m^a) \leftarrow\!\shortmid\, a + m\mathbb{Z}$$

kommutiert, folgt

$$\varprojlim_n \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} \varprojlim_n \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times = \hat{\mathbb{Z}}^\times$$

∎

Allgemein: Ω / k galoissch

Beh: $\mathrm{Gal}(\Omega / k) \simeq \varprojlim\limits_{\substack{K|k \\ \text{endlich gal.}}} \mathrm{Gal}(K|k)$

bez. $\begin{array}{c} L \\ | \\ K \\ | \\ k \end{array}$ alles gal. $\quad \mathrm{Gal}(L/k) \xrightarrow{\text{res}} \mathrm{Gal}(K/k)$

$$\sigma \longmapsto \left(\sigma|_K\right)_K$$

$$\left(\Omega \ni \alpha \longmapsto \sigma_K(\alpha)\right) \longleftarrow\!\!\mid \left(\sigma_K\right)_K$$

$$\begin{array}{c} L \\ / \\ K \\ | \\ k(\alpha) \\ | \\ k \end{array}$$

K / k: $<\infty$, gal.; L / k: $<\infty$

$\sigma_K : K \longrightarrow K$

Hängt ~~von~~ nicht von der Wahl von K ab, denn:

$\sigma_L(\alpha) = \sigma_K(\alpha)$, da $\sigma_L|_K = \sigma_K$.

<u>Aufgabe 4)</u> Aus Local Fields, Serre

a) $G = \hat{\mathbb{Z}} = \left\{ a = (a_m + m\mathbb{Z})_m \in \prod_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \right.$

mit $a_m \equiv a_n \pmod{n\mathbb{Z}}$,

falls $n \mid m \Big\}$

$= \varprojlim_m \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ pro-zyklisch

<u>Beh:</u> $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \hat{\mathbb{Z}}/n\hat{\mathbb{Z}}$

<u>Bew:</u> Betrachte $\hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\pi_n} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$(a_m + m\mathbb{Z})_m \longmapsto a_n + n\mathbb{Z}$

<u>Surjektivität:</u> $a_n + n\mathbb{Z}$ ist Bild von

$(a_n + m\mathbb{Z})_m$

<u>klar:</u> $n\hat{\mathbb{Z}} \subseteq \ker(\pi_n)$

$\rightsquigarrow \hat{\mathbb{Z}}/n\hat{\mathbb{Z}} \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Betrachte

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \hat{\mathbb{Z}}/n\hat{\mathbb{Z}}$

$a + n\mathbb{Z} \longmapsto (a + m\mathbb{Z})_m + n\hat{\mathbb{Z}}$

Wohldefiniertheit von ψ:

Sei $a \equiv b \pmod{n\mathbb{Z}}$

$$\Rightarrow (a+m\mathbb{Z})_m - (b+m\mathbb{Z})_m$$
$$= ((a-b)+m\mathbb{Z})_m \in n\hat{\mathbb{Z}}.$$

Zu $\psi \circ \varphi = id$

$$(\psi\circ\varphi)(a_m + m\mathbb{Z})_m = \psi(a_n + n\mathbb{Z})$$
$$= (a_n + m\mathbb{Z})_m + n\hat{\mathbb{Z}}$$

z.z. $((a_n - a_m) + m\mathbb{Z})_m \in n\hat{\mathbb{Z}}$

Zeige dazu: $a_n - a_m \in n \cdot \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{Z}n+\mathbb{Z}m}{\mathbb{Z}m}$

$$= \mathbb{Z}\cdot d / \mathbb{Z}m, \quad d = ggT(n,m)$$

Zeige also:

$$d \mid a_n - a_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Dies folgt aus der Def. von $\hat{\mathbb{Z}}$, denn:

$$a_n \equiv a_d \equiv a_m \pmod{d\mathbb{Z}}$$

Zu $\varphi\circ\psi = id$: $(\varphi\circ\psi)(a+n\mathbb{Z}) = \varphi((a+m\mathbb{Z})_m) = a+n\mathbb{Z}$

b) $n\hat{\mathbb{Z}}$ definiert eine Topologie auf $\hat{\mathbb{Z}}$.

$\uparrow$ offene Bälle um 0

<u>Bem:</u>
$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\subseteq \hat{\mathbb{Z}} \\ a &\longmapsto (a + m\mathbb{Z})_m \end{aligned}$$

<u>Beh:</u> $\mathbb{Z} \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$ dicht

<u>Bew:</u> Sei $a = (a_m + m\mathbb{Z})_m \in \hat{\mathbb{Z}}$

Sei $a + N\hat{\mathbb{Z}}$ eine kleine Kugel um a.

<u>Zeige:</u> Es gibt $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \in a + N\hat{\mathbb{Z}}$

<u>Dazu:</u> a) $\Rightarrow$

$$a = (a_m + m\mathbb{Z})_m \equiv (a_N + m\mathbb{Z})_m \pmod{N\hat{\mathbb{Z}}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a_N + m\mathbb{Z})_m}_{\in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}} \text{ liegt in } a + N\hat{\mathbb{Z}}.$$

c) $\mathbb{Z} \subseteq \hat{\mathbb{Z}} = G$ Sei A ein G-Modul.

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto F \\ n &\longmapsto F^n \end{aligned}$$

Beh: A stetiger $G = \hat{\mathbb{Z}}$-Modul

$$\Rightarrow \forall a \in A \; \exists n \in \mathbb{N} : F^n a = a$$

(die Aufgabenstellung ist fehlerhaft)

Bew: Sei $a \in A$.

A stetiger G-Modul

$$\Rightarrow \underbrace{G_a = \{\sigma \in G = \hat{\mathbb{Z}} \mid \sigma a = a\} \le \hat{\mathbb{Z}}}_{\text{offen}} = G$$

Sei $\sigma = (0 + m\mathbb{Z})_m = 0$

das triviale Element in G, also $\sigma \in G_a$

Finde $N \in \mathbb{N}$ groß mit $N\hat{\mathbb{Z}} \subseteq G_a$

Wähle n, so daß $\underbrace{(n + m\mathbb{Z})_m}_{\in \underbrace{\mathbb{Z} \subseteq}_{\text{dicht}} \hat{\mathbb{Z}}} \in N\hat{\mathbb{Z}} \subseteq G_a$

$$\Rightarrow F^n \in G_a, \text{ d.h. } F^n a = a.$$

d) $A' = \{ a \in A \mid \exists n > 0$ s.d.
$(1 + F + \dots + F^{n-1}) a = 0 \}$

<u>Definiere:</u> $H^q(G, A) := \varinjlim_n H^q(\underbrace{G/G_n}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, A^{G_n})$

nicht Tate-Kohomologie

Z.z. a) $H^0(G, A) = A^G$

b) $H^1(G, A) \cong A'/(F-1)A$

<u>Zu a)</u> $H^0(G/G_n, A^{G_n}) = (A^{G_n})^{G/G_n}$

$= A^G$

<u>Oftmals in der Literatur:</u>

$H^q(G, A)$ Gruppen-Kohomologie $q \geq 0$

$\longrightarrow$ $H^0(G, A) = A^G$ als abgeleiteter Funktor von $M \mapsto M^G$

$\hat{H}^0(G, A) = A^G / N_G A$ Tate-Kohomologie $q \in \mathbb{Z}$

$$H^1(G,A) = \varinjlim H^1\left(G/G_n, A^{G_n}\right)$$

$$= \varinjlim H^{-1}\Big(\underbrace{G/G_n}_{\langle F \bmod G_n \rangle}, A^{G_n}\Big)$$

z.z.

$$\varinjlim_n \frac{\{a \in A^{G_n} \mid (1+F+\dots+F^{n-1})a = 0\}}{\underbrace{I_{G/G_n}}_{(\bar{F}-1)\mathbb{Z}[G/G_n]} A^{G_n}} \qquad = (\bar{F}-1)A^{G_n}$$

$$\cong A'/(\bar{F}-1)A$$

Sei $n \mid m \Rightarrow m\hat{\mathbb{Z}} \subseteq n\hat{\mathbb{Z}}$

$\Rightarrow A^{G_n} \subseteq A^{G_m}$

$$\begin{array}{ccc}
{}_{(1+F+\dots+F^{n-1})}A^{G_n} & \subseteq & {}_{(1+F+\dots+F^{m-1})}A^{G_m} \\
! \quad \cup & & \cup \\
(\bar{F}-1)A^{G_n} & \subseteq & (\bar{F}-1)A^{G_m}
\end{array}$$

$$\varinjlim_n (1+\dots+F^{n-1})A^{F^n} \big/ (F-1)A^{F^n} \cong A' \big/ (F-1)A$$

$$(a, n) \overset{\varphi}{\longmapsto} a + (F-1)A$$

$$\left(a + (F-1)A^{F^n}, n\right) \overset{\psi}{\longleftarrow\!\shortmid} a + (F-1)A$$

Wähle n mit $(1+F+\dots+F^{n-1})a = 0$

<u>Noch zu zeigen:</u>

φ wohldefiniert $\big((a, n) \sim (b, m)$

$\Rightarrow a + (F-1)A$

$= b + (F-1)A \big)$

ψ wohldefiniert

φ und ψ sind zueinander invers.