Aufgabe 1) $f, g : A \to A$, $f \circ g = g \circ f = 0$

Def.: $$q_{f,g}(A) = q_{f,g} := \frac{(\ker(f) : \operatorname{im}(g))}{(\ker(g) : \operatorname{im}(f))}$$

falls Zähler und Nenner endlich sind.

Beob.: (1) $q_{f,g} = q_{g,f}^{-1}$

(2) $q_{0,f} = \dfrac{|A/f(A)|}{|\ker(f)|}$, falls $|A/f(A)| < \infty$, $|\ker(f)| < \infty$

(3) q_{0,f^n} definiert $\Rightarrow$ $q_{0,f}$ definiert (und $q_{0,f}^n = q_{0,f^n}$ (später mit A4))

Dazu: $$\left.\begin{array}{c} A \\ | \\ f(A) \\ | \\ f^n(A) \end{array}\right) < \infty \Rightarrow |A/f(A)| < \infty$$

$$\ker(f) \subseteq \underbrace{\ker(f^n)}_{\text{endl.}} \Rightarrow |\ker(f)| < \infty$$

Jetzt sei $G = \langle \sigma \rangle$

$D : A \to A$, $a \mapsto (\sigma - 1)a$

$N : A \to A$, $a \mapsto N_G\, a$

z.z. $$h(A) = \frac{|H^0(G,A)|}{|H^{\pm 1}(G,A)|} \overset{!}{=} q_{D,N}(A)$$

Beweis: Direkt aus den Definitionen $\blacksquare$

Aufgabe 2) $G = \langle \sigma \rangle$, $|G| = n$

A habe triviale G-Wirkung

z.z. $h(A) = q_{0,n}(A)$

Bew:

$$q_{0,n} = \frac{|A/nA|}{|\ker(A \xrightarrow{n} A)|} \overset{!}{=} h(A)$$

denn: $H^0(G,A) = A^G/N_G A = A/nA$

$N_G a = |G| a$

$$H^{-1}(G,A) = {}_{N_G}A/I_G A = \frac{\ker(A \xrightarrow{n} A)}{0}$$

$I_G = (\sigma - 1)\mathbb{Z}[G] \qquad = \ker(n).$

Einfacher: Benutze A1, **denn:**

$D = 0$, falls A triviale G-Wirkung hat

N = Mult. mit $n = |G|$

$\blacksquare$

Aufgabe 3) Sei

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

z.z. $q_{0,n}(B) = q_{0,n}(A) \cdot q_{0,n}(C)$, "falls 2 der q-Quotienten definiert sind".

Bew:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_A \arrow[r] \arrow[d, hook] & K_B \arrow[r] \arrow[d, hook] & K_C \arrow[d, hook] \arrow[dddll, bend left, out=0, in=180] & & \text{Kerne} \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "n"] & B \arrow[r] \arrow[d, "n"] & C \arrow[r] \arrow[d, "n"] & 0 & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, two heads] & B \arrow[r] \arrow[d, two heads] & C \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 & \\
& A/nA \arrow[r] & B/nB \arrow[r] & C/nC \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \frac{|K_A| \cdot |K_C| \, |B/nB|}{|K_B| \, |A/nA| \, |C/nC|} = 1$$

$\Rightarrow$ Beh.

Fall $q_{0,n}(A)$, $q_{0,n}(B)$ definiert. ✓

Andere Fälle analog. ■

Aufgabe 5) $G = \langle \sigma \rangle$, $|G| = p$ Pz.

$q_{0,p}(A)$ sei definiert, d.h.

$$\left| A/pA \right| , \left| \ker(A \xrightarrow{p} A) \right| < \infty$$

Zeige: a) $q_{0,p}(A^G)$ ist definiert

b) $$h(A)^{p-1} = q_{0,p}(A^G)^p / q_{0,p}(A)$$

$$= f(A^G)^p / f(A)$$ (Satz 2.86 bei Stucky)

Beweis: Die Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(A^G \xrightarrow{p} A^G) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(A \xrightarrow{p} A) \arrow[r] & \ker(I_G A \xrightarrow{p} I_G A) \arrow[d] \arrow[ddll, bend left] & \\
0 \arrow[r] & A^G \arrow[r] \arrow[d, "p"] & A \arrow[r, "D = \sigma - 1"] \arrow[d, "p"] & I_G A \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^G \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & I_G A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& A^G/pA^G \arrow[r] & A/pA \arrow[r] & I_G A/pI_G A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(*)

$$\Rightarrow \left| I_G A / p I_G A \right| < \infty$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(I_G A \xrightarrow{p} I_G(A)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \ker(A \xrightarrow{p} A) \arrow[d, hook] & & \\
0 \arrow[r] & I_G A \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "p"] & A \arrow[r] \arrow[d, "p"] & A/I_G A \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_G A \arrow[r] & A \arrow[r] & A/I_G A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Schlangenlemma $\Rightarrow \left|\ker(I_G A \xrightarrow{p} I_G A)\right| < \infty$

$\Rightarrow q_{0,p}(I_G A)$ ist definiert.

$\overset{A3}{\Rightarrow} q_{0,p}(A^G)$ ist definiert

Damit ist a) gezeigt.

<u>Zu b)</u> A3 auf $(*)$ $\Rightarrow$

$$q_{0,p}(A) = \underbrace{q_{0,p}(A^G)}_{= h(A^G) \text{ nach A2}} \cdot q_{0,p}(I_G A) \quad (**)$$

<u>Berechnung von $q_{0,p}(I_G A)$:</u>

- $\mathbb{Z} \cdot N_G \lhd \mathbb{Z}[G]$
- $\mathbb{Z} \cdot N_G$ annulliert $I_G A$, denn: $(\sigma - 1) N_G = 0$

Also ist $I_G A$ ein $\mathbb{Z}[G]/_{\mathbb{Z}\cdot N_G}$ – Modul.

<u>ZIEL:</u> $\mathbb{Z}[G]/_{\mathbb{Z}\cdot N_G} \cong \mathbb{Z}[\zeta_p]$

<u>Dazu:</u> $\mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}[G]\,,\quad X \longmapsto \sigma$

<u>Beh:</u> Der Kern ist $(X^p - 1)\mathbb{Z}[X]$

<u>Denn:</u> $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ erfülle $f(\sigma) = 0$

Teile mit Rest $\Rightarrow$

$$f(X) = g(X)(X^p - 1) + r(X)\,,\quad \text{grad}(r) < p \text{ oder } r = 0$$

$\Rightarrow 0 = r(\sigma)$

$\Rightarrow r = 0$

<u>Also:</u> $\mathbb{Z}[X]/_{(X^p-1)\mathbb{Z}[X]} \cong \mathbb{Z}[G]$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}[X] \arrow[rr, two heads] \arrow[d, dash] & & \mathbb{Z}[G] \arrow[d, dash] \\
\underbrace{\mathbb{Z}(1+X+\dots+X^{p-1}) + (X^p-1)\mathbb{Z}[G]}_{(**)} \arrow[rr] \arrow[d, dash] & & \mathbb{Z}\cdot N_G \arrow[d, dash] \\
(X^p-1)\mathbb{Z}[G] \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}$$

<u>Wir zeigen:</u>

$$(**) = (1+X+\dots+X^{p-1})\mathbb{Z}[X]$$

Zu: $\mathbb{Z}(1+X+\dots+X^{p-1}) + (X^p-1)\mathbb{Z}[X]$

$$= (1+X+\dots+X^{p-1})\mathbb{Z}[G]$$

„$\subseteq$“ $X^p-1 = (X-1)(1+X+\dots+X^{p-1})$

„$\supseteq$“ Es reicht zu zeigen:

$$X^{m+1}(1+X+\dots+X^{p-1}) \in \text{l.S.}$$

$$\begin{aligned}
&= X\left(X^m(1+X+\dots+X^{p-1})\right) \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} X\left(a(1+X+\dots+X^{p-1}) + f(X)(X^p-1)\right) \\
&= a\underbrace{X(1+X+\dots+X^{p-1})}_{\substack{= X+X^2+\dots+X^p \\ = (1+X+\dots+X^{p-1}) + (X^p-1)}} + Xf(X)(X^p-1) \quad \in \text{l.S.}
\end{aligned}$$

Bisher erreicht:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, mapsto] & \mathbb{Z}[X]/(1+X+\dots+X^{p-1})\mathbb{Z}[G] \arrow[d] \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z}\cdot N_G \arrow[dl, "\simeq"'] \\
\zeta_p & \mathbb{Z}[\zeta_p] &
\end{tikzcd}$$

$\sigma \mapsto \zeta_p$

denn: $1+\zeta_p+\dots+\zeta_p^{p-1} = 0$

Bekannt aus Zth. I:

$$p = (\zeta_p - 1)^{p-1} \cdot e, \quad e \in \mathcal{O}_K^\times = \mathbb{Z}[\zeta_p]^\times$$

$$K = \mathbb{Q}(\zeta_p) \quad \Big| \; p-1 \quad \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \quad p = (\bar{\sigma} - 1)^{p-1} \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon \in \left(\mathbb{Z}[G] / \mathbb{Z} N_G \right)^\times$$

$$I_G A \xrightarrow[\simeq]{\varepsilon} I_G A \quad \Rightarrow \quad q_{0,\varepsilon}(I_G A) = 1.$$

$$A4 \Rightarrow q_{0,p}^{(I_G A)} = q_{0,D^{p-1}}(I_G A)$$

$$= \left(q_{0,D}(I_G A) \right)^{p-1}$$

$$= 1 / q_{D,0}(I_G A)^{p-1}$$

$$= 1 / q_{D,N}(I_G A)^{p-1}, \quad N = 0 \text{ auf } I_G A$$

Einsetzen

$$\Rightarrow q_{0,p}(A) \overset{A1}{=} q_{0,p}(A^G) \quad \frac{1}{h(I_G A)^{p-1}}$$

Verwende

$$0 \to A^G \to A \xrightarrow{D} I_G A \to 0$$

$$\Longrightarrow \quad h(A)^{p-1} = h(A^G)^{p-1}\, h(I_G A)^{p-1}$$

$$\Longrightarrow \quad q_{0,p}(A) = q_{0,p}(A^G)\, \frac{h(A^G)^{p-1}}{h(A)^{p-1}}$$

$$= q_{0,p}(A^G)^{p-1} \big/ h(A)^{p-1} \qquad \blacksquare$$