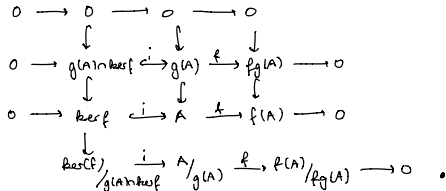


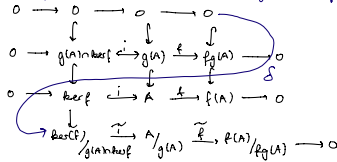
Aufgabe 4

Sei A eine abelsche Gruppe.
Seien $f, g: A \rightarrow A$ mit $fg = gf$

Betrachte das folgende Diagramm



Das Schlangenlemma liefert den Verbindungs-Kommutativismus



und die Sequenz $0 \xrightarrow{\delta} \ker f / g(A) \cap \ker f \xrightarrow{i} A / g(A) \xrightarrow{f} f(A) / fg(A) \rightarrow 0$ ist exakt.

Es gilt daher $f(A) / fg(A) \cong (A / g(A)) / \ker(\bar{f})$

$$\begin{aligned}
 &\cong (A / g(A)) / (\ker f / g(A) \cap \ker f) \\
 &\cong (A / g(A)) / (\ker f / g(A) \cap \ker f)
 \end{aligned}$$

Es folgt: $\frac{(A:fg(A))}{|\ker(\bar{f})|} \cdot |g(A) \cap \ker f| = \frac{(A:fg(A))}{|\ker(\bar{f})|} \cdot (A:fg(A)) \cdot |g(A) \cap \ker f|$

und weiter

- es $= \frac{(A:fg(A))}{|\ker(\bar{f})|} \cdot \frac{|g(A) \cap \ker f| \cdot |\ker f|}{|\ker f|} = \frac{|\ker(\bar{f})|}{|\ker f|} \cdot |g(A) \cap \ker f| \cdot |\ker f|$
- falls $|\ker f| < \infty$ $= |g(A) \cap \ker f| \cdot |\ker f|$
- es $= \frac{(A:fg(A))}{|\ker(\bar{f})|} \cdot |g(A) \cap \ker f| \cdot |\ker f|$

denn: Für $y \in \ker(\bar{f})$ gilt:
 $fy = x \in \ker f \cap g(A)$
 Also $\ker(\bar{f}) = g^{-1}(\ker f \cap g(A))$
 hat Kardinalität $|g(A) \cap \ker f| \cdot |\ker f|$

Also ist (unter den zusätzlichen Endlichkeitsannahmen)

$$\frac{|\ker(\bar{f})|}{|\ker(\bar{f})|} \cdot |g(A) \cap \ker f| \cdot |\ker f| = \frac{(A:fg(A))}{|\ker(\bar{f})|} \cdot |g(A) \cap \ker f| \cdot |\ker f|$$

Es folgt, dass $\frac{(A:fg(A))}{|\ker(\bar{f})|} \cdot |g(A) \cap \ker f| \cdot |\ker f| = \frac{(A:fg(A))}{|\ker(\bar{f})|} \cdot |g(A) \cap \ker f| \cdot |\ker f|$

Wobei wir verwendet haben, dass

$$(A:fg(A)) \cdot |\ker(\bar{f})| \cdot |\ker f| = (A:fg(A)) \cdot |\ker(\bar{f})| \cdot |\ker f|$$

endlich sind.

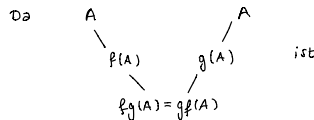
Das ist der Fall, falls $|g(A) \cap \ker f|$ und $|g(A)|$ existieren.

Falls $|g(A) \cap \ker f| < \infty$ und $(A:fg(A)) < \infty$

Wir zeigen jetzt, dass aus Existenz von $|g(A) \cap \ker f|$ die Existenz von $|g(A)|$ und $|fg(A)|$ folgt

$$\begin{aligned}
 |g(A) \cap \ker f| &= |\ker(\bar{f})| \cdot |g(A) \cap \ker f| \\
 &= |\ker(\bar{f})| \cdot |fg(A) \cap \ker f|
 \end{aligned}$$

Daher gilt $|g(A) \cap \ker f| < \infty \Rightarrow |\ker(\bar{f})|, |\ker f| < \infty$.



$$(A:fg(A)) \geq (A:f(A)) \quad \text{und} \quad (A:fg(A)) \geq (A:g(A))$$

Es gilt deshalb $(A:fg(A)) < \infty \Rightarrow (A:f(A)), (A:g(A)) < \infty$.

Also existieren $|g(A)|, |fg(A)|$ (falls $|g(A) \cap \ker f|$ existiert).

Falls also $|g(A) \cap \ker f|$ oder $|g(A) \cap \ker f|$ und $|g(A) \cap \ker f|$ existieren, so existieren auch die/der anderen Quotient(en) und es gilt

$$|fg(A)| = |g(A)| \cdot |fg(A)|$$