Aufgabe 4

Sei A eine abelsche Gruppe.
Seien $f,g: A \longrightarrow A$ mit $fg = gf$

Betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & g(A)\cap\ker f \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook] & g(A) \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & fg(A) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & A \arrow[r, "f"] & f(A) \arrow[r] & 0 \\
 & \ker(f)/_{g(A)\cap\ker f} \arrow[r, "i"] & A/_{g(A)} \arrow[r, "f"] & f(A)/_{fg(A)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
.

Das Schlangenlemma liefert den Verbindungshomomorphismus

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[d, hook] \arrow[dddll, bend left, "\delta"] & \\
0 \arrow[r] & g(A)\cap\ker f \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook] & g(A) \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & fg(A) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & A \arrow[r, "f"] & f(A) \arrow[r] & 0 \\
 & \ker(f)/_{g(A)\cap\ker f} \arrow[r, "\tilde{i}"] & A/_{g(A)} \arrow[r, "\tilde{f}"] & f(A)/_{fg(A)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und die Sequenz $0 \xrightarrow{\delta} \ker f/_{g(A)\cap\ker f} \xrightarrow{i} A/_{g(A)} \xrightarrow{\tilde{f}} f(A)/_{fg(A)} \longrightarrow 0$

ist exakt.

Es gilt daher
$$f(A)/_{fg(A)} \simeq \left(A/_{g(A)}\right)/_{\ker(\tilde{f})}$$
$$\simeq \left(A/_{g(A)}\right)/_{i(\ker f/_{g(A)\cap\ker f})}$$
$$\simeq \left(A/_{g(A)}\right)/\left(\ker(f)/_{g(A)\cap\ker f}\right)$$

Es folgt: $\dfrac{(A:g(A))}{|\ker(f)|} \cdot |g(A)\cap\ker f| \underset{\uparrow}{=} (f(A):fg(A))$

falls $|\ker(f)|, (A:g(A)), |g(A)\cap\ker f| < \infty$

und weiter

- $ls \underset{\uparrow}{=} \underbrace{\dfrac{(A:g(A))}{|\ker(g)|}}_{=q_{0,g}(A)} \cdot \dfrac{|g(A)\cap\ker f|\,|\ker g|}{\ker f} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{|\ker(fg)|}{|\ker(f)|} \cdot q_{0,g}(A)$

  falls $|\ker g| < \infty$

  $|\ker(g)| \cdot |g(A)\cap\ker(f)| = |\ker(fg)|$,
  denn: Für $y \in \ker(fg)$ gilt:
  $g(y) =: x \in \ker(f)\cap g(A)$.
  Also $\ker(fg) = g^{-1}(g(A)\cap\ker f)$
  hat Kardinalität $|g(A)\cap\ker f| \cdot |\ker g|$

- $rs \underset{\uparrow}{=} \dfrac{(A:fg(A))}{(A:f(A))}$

  $(A:fg(A)) = (A:f(A))\cdot(f(A):fg(A))$

Also ist (unter den zusätzlichen Endlichkeitsannahmen)
$$\frac{|\ker(fg)|}{|\ker(f)|} \cdot q_{0,g}(A) = \frac{(A:fg(A))}{(A:f(A))}$$

Es folgt, dass
$$\underbrace{\frac{(A:f(A))}{|\ker(f)|}}_{=q_{0,f}(A)} \cdot q_{0,g}(A) = \frac{(A:fg(A))}{\ker(fg)} = q_{0,fg}(A)$$

Wobei wir verwendet haben, dass

$(A:gA)$, $|\ker(f)|$, $|\ker(g)|$, $(A:f(A))$ und $(f(A):fg(A))$

endlich sind.

Das ist der Fall, falls $q_{0,f}(A)$ und $q_{0,g}(A)$ existieren.

Falls $q_{0,fg}(A)$ existiert, so gilt
$$|\ker(fg)| < \infty \quad \text{und} \quad (A:fg(A)) < \infty$$
Wir zeigen jetzt, dass aus Existenz von $q_{0,fg}(A)$ die Existenz von $q_{0,f}(A)$ und $q_{0,g}(A)$ folgt

Es ist $|\ker(fg)| = |\ker(g)| \cdot |g(A)\cap\ker f|$
$\underset{\uparrow}{=} |\ker(f)| \cdot |f(A)\cap\ker g|$

$|\ker(fg)| = |\ker(gf)|$, benenne f,g um!

Daher gilt $|\ker(fg)| < \infty \Rightarrow |\ker(g)|, |\ker(f)| < \infty$.

Da
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A \arrow[dr, dash] & & & A \arrow[dl, dash] \\
 & f(A) \arrow[dr, dash] & g(A) \arrow[d, dash] & \\
 & & fg(A) = gf(A) &
\end{tikzcd}$$
ist

$(A:fg(A)) \geq (A:f(A))$ und $(A:fg(A)) \geq (A:g(A))$

Es gilt deshalb $(A:fg(A)) < \infty \Rightarrow (A:f(A)), (A:g(A)) < \infty$.

Also existieren $q_{0,f}(A)$, $q_{0,g}(A)$ (falls $q_{0,fg}(A)$) existiert.

Falls also $q_{0,fg}(A)$ oder $q_{0,f}(A)$ und $q_{0,g}(A)$ existieren, so existieren auch die/der andere(n) Quotien(en) **und es gilt**
$$q_{0,fg}(A) = q_{0,f}(A) \cdot q_{0,g}(A).$$