Übung 6

18.6.2020

Aufgabe 2 $\quad U \leq G$

z.z. $\quad \mathrm{Kor}_{-2} : H^{-2}(U,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{-2}(G,\mathbb{Z})$

$$\begin{tikzcd}
H^{-2}(U,\mathbb{Z}) \arrow[d, phantom, "\cong"] & H^{-2}(G,\mathbb{Z}) \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
U^{ab} \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d, equal] & G^{ab} \arrow[d, equal] \\
U/U' & G/G'
\end{tikzcd}$$

φ ist kanonisch, d.h.

$$\sigma U' \overset{\varphi}{\longmapsto} \sigma G'$$

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_U \arrow[r] \arrow[d, "\subseteq"] & \mathbb{Z}[U] \arrow[r] \arrow[d, "\subseteq"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_G \arrow[r] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutiert

$$\begin{tikzcd}
H^{-2}(U,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & H^{-1}(U,I_U) = I_U/I_U^2 \arrow[d] & U^{ab} \arrow[l] \arrow[dd, dashed, "\varphi"] \\
H^{-2}(U,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{Kor}_{-2}"] & H^{-1}(U,I_G) = I_G/I_U I_G \arrow[d, "\mathrm{Kor}_{-1}"] & \\
H^{-2}(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta"] & H^{-2}(G,I_G) = I_G/I_G^2 & G^{ab} \arrow[l, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

$(\sigma-1)+I_U^2 \longmapsfrom \sigma U'$

$(\sigma-1)+I_U^2 \longmapsto (\sigma-1)+I_U I_G \longmapsto (\sigma-1)+I_G^2$

$(\sigma-1)+I_G^2 \longmapsfrom \sigma G'$ ∎

Aufgabe 3) $\quad U \leq G$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dash, "U"] \arrow[dd, dash, bend left, "G"] \\ F \arrow[d, dash] \\ K \end{tikzcd}$$

Beh:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Kor}_0 : H^0(U, L^\times) & \longrightarrow & H^0(G, L^\times) \\ \| & & \| \\ F^\times / N_{L|F}(L^\times) & & K^\times / N_{L|K}(L^\times) \end{array}$$

ist induziert von $N_{F|K}$

Hi~~er~~ benutzt man:

$$N_{L|F}(\alpha) = \text{Produkt über die Konjugierten}$$

$$\alpha \in L^\times \qquad = \prod_{\sigma \in U} \sigma(\alpha)$$

Allgemein: $\quad \mathrm{Kor}_0 : H^0(U, A) \longrightarrow H^0(G, A)$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ A^U / N_U A & & A^G / N_G A \\ a + N_U A & \longmapsto & N_{G/U} a + N_G A \end{array}$$

Also ist zu zeigen: Für $\alpha \in F^\times$ ist

$$N_{G/U} \alpha \overset{!}{=} N_{F|K}(\alpha).$$

G/U ist hierbei ein VS von G/U, d.h.

$$G = \dot{\bigcup_{g \in G/U}} gU$$

Es gilt: • $G/U = G(F/K, F^c/K)$

• $N_{F|K}(\beta)$ = Produkt ihrer Konjugierte.
$\beta \in F^\times$

<u>Analog:</u> $H^0(U, L) \longrightarrow H^0(G, L)$

Hier entspricht N_U bzw. N_G den Spuren $Tr_{L|F}$ bzw. $Tr_{L|K}$. ∎