

G endliche Gruppe, $U \leq G$ Untergruppe, A G -Modul.
Für $q \geq 1$ haben wir die Restriktionsabbildungen

$$\text{Res}_q : H^q(G, A) \longrightarrow H^q(U, A) \text{ , die induziert werden}$$

von $(x : G^q \longrightarrow A) \longmapsto (x|_{U^q} : U^q \longrightarrow A)$

Ziel: universelle Eigenschaft dieser Restriktionsabbildungen
herleiten und diese nutzen, um Familie

$(\text{Res}_q : H^q(G, A) \longrightarrow H^q(U, A))_{q \in \mathbb{Z}}$ zu definieren,
die diese Eigenschaft erfüllt

→ Alternative Beschreibung der Restriktionsabbildungen.

a) Sei G eine endliche Gruppe, $U \subseteq G$ und A ein G -Modul.

Dann ist A ein U -Modul (vermöge der Einschränkung der Skalarmultiplikation auf U .)

$$\text{z.z.: } \text{Res}_U : H^0(G, A) \longrightarrow H^0(U, A) \quad \mathfrak{a} + N_G A \longmapsto \mathfrak{a} + N_U A$$

ist wohldefiniert.

$$\text{Es gilt } A^G \subseteq A^U. \text{ Daher ist } \pi : A^G \longrightarrow H^0(U, A) \text{ wohldefiniert.}$$

$$\mathfrak{a} \longmapsto \mathfrak{a} + N_U A$$

Zeige, dass $N_G A \subseteq \text{Ker}(\pi) = N_U A$; dann induziert π Res_U .

Dazu: Sei g_1, \dots, g_n ein Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen von U in G also $G = \bigsqcup_{i=1}^n U g_i$.

Für $\mathfrak{a} \in A$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} g \cdot \mathfrak{a} &= \sum_{i=1}^n \sum_{u \in U} u g_i \cdot \mathfrak{a} = \sum_{u \in U} \sum_{i=1}^n u g_i \cdot \mathfrak{a} \\ &= \sum_{u \in U} u \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n g_i \cdot \mathfrak{a}}_{=: \mathfrak{a}' \in A} \in N_U A. \end{aligned}$$

Also ist $N_G A \subseteq N_U A$.

b) Sei $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von G -Modulen (also auch von U -Moduln.)

$$\begin{array}{ccc} \text{z.z.: } H^0(G, C) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G, A) \\ \downarrow \text{Res}_0 & & \downarrow \text{Res}_1 \\ H^0(U, C) & \xrightarrow{\delta} & H^1(U, A) \end{array}$$

Kommutiert.

"Erinnerung" an die Def. des Verbindungshomomorphismus:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{-1} & \xrightarrow{i} & B_{-1} & \xrightarrow{j} & C_{-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_0 & & \downarrow \partial_0 & & \downarrow \partial_0 \\ 0 & \longrightarrow & A_0 & \xrightarrow{i} & B_0 & \xrightarrow{j} & C_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 \\ & & A_1 & \xrightarrow{i} & B_1 & \xrightarrow{j} & C_1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

$a_1 \longmapsto b_1$ (green arrow)
 $b_0 \longmapsto c_0 \in C^G$ (green arrow)
 $\downarrow \partial_1$ (green arrow)

Setze $\text{res}_1: \text{Hom}_G(G, A) \rightarrow \text{Hom}_U(U, A)$

$$\text{res}_0: \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & X|_U \\ A^G & \xrightarrow{\quad} & A^U \end{array}$$

$$\text{res}_q: \{x: G^q \rightarrow A\} \rightarrow \{x: U^q \rightarrow A\}$$

$$X \longmapsto X|_{U^q}$$

Sei $c_0 \in C^G$ beliebig. Sei $\partial_1 + \text{Im}(\partial_1) = \delta(c_0 + N_G C)$.

Dann gibt es ein $b_0 \in B_0$ mit

$$j b_0 = c_0 \text{ und } i \partial_1 = \partial_0 b_0$$

Es gilt $\text{res}_1(i \partial_1) = i \text{res}_1(\partial_1) = \text{res}_1(\partial_0 b_0) = \partial_0 \text{res}_0(b_0)$

und $j \text{res}_0 b_0 = \text{res}_0(jb_0) = \text{res}_0(c_0)$.

$$\begin{aligned} \text{Daher ist } \text{res}(\partial_1) + \text{Im}(\partial_1) &= \delta(\text{res}_0(c_0) + N_u C) \\ &\parallel \\ \text{Res}_1(\partial_1 + \text{Im}(\partial_1)) &= \delta(\text{Res}_0(c_0 + N_G C)) \\ &\parallel \\ \text{Res}_1(\delta(c_0 + N_G C)) \end{aligned}$$

Wir haben dabei verwendet, dass $\partial_{q+1} \circ \text{res}_q = \text{res}_{q+1} \circ \partial_{q+1}$ für alle $q \geq 0$ und dass

für alle G -Modulhomomorphismen $f: X \rightarrow Y$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} H^q(G, X) & \xrightarrow{f} & H^q(G, Y) \\ \text{res}_q \downarrow & & \downarrow \text{res}_q \text{ für } q=0,1. \\ H^q(U, X) & \xrightarrow{f} & H^q(U, Y) \text{ kommutiert.} \end{array}$$

(Gilt analog für $q \geq 1$).

Bemerkung:

c) Für $q \geq 1$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H^q(G, C) & \xrightarrow{f} & H^{q+1}(G, A) \\ \downarrow \text{Res}_q & & \downarrow \text{Res}_q \\ H^q(U, C) & \xrightarrow{f} & H^{q+1}(U, A) \end{array}$$

Dazu:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{q-1} & \xrightarrow{i} & B_{q-1} & \xrightarrow{j} & C_{q-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial_q \\ 0 & \longrightarrow & A_q & \xrightarrow{i} & B_q & \xrightarrow{j} & C_q \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_{q+1} & & \downarrow \partial_{q+1} & & \downarrow \partial_{q+1} \\ & & & & & & \end{array}$$

Repräsentant von \bar{c}_q in $\text{Ker}(\partial_{q+1})$ / $\text{Im}(\partial_q$
 $b_q \xrightarrow{i} c_q \in \text{Ker}(\partial_{q+1})$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow^{-q-1} & & \downarrow^{-q-1} & & \\
 A_{q+1} & \xrightarrow{i} & B_{q+1} & \xrightarrow{j} & C_{q+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 a_{q+1} & \xrightarrow{\quad} & b_{q+1} & & & &
 \end{array}$$

Sei $c_q \in \text{Ker}(\partial_{q+1})$ beliebig,

Sei $a_{q+1} \in A_{q+1}$ mit $a_{q+1} + \text{Im}(\partial_{q+1}) = \int_q(\overline{c_q})$.

und $i a_{q+1} = \partial b_q$ für ein $b_q \in B_q$ mit $j b_q = c_q$.

$\text{res}_{q+1}(a_{q+1})$ erfüllt dann:

↑
Einschränkung von
 $\partial_{q+1}: G^{q+1} \rightarrow A$
auf U^{q+1}

$$\begin{aligned}
 i(\text{res}_{q+1}(a_{q+1})) &= \text{res}_{q+1}(i a_{q+1}) = \text{res}_{q+1}(\partial b_q) \\
 &= \partial \text{res}_q(b_q)
 \end{aligned}$$

$$\text{und es gilt } \text{res}_q(c_q) = \text{res}_q(j b_q) = j \text{res}_q(b_q).$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
 \text{res}_{q+1}(a_{q+1}) + \text{Im}(\partial_{q+1}) &= \int(\underbrace{\text{res}_q(c_q)}_{= \text{res}_q(\overline{c_q})}), \\
 &= \text{res}_q(\overline{c_q})
 \end{aligned}$$

wobei $(\int), (\int^*)$ verwendet wurden.

Definition / Satz:

Sei G eine endliche Gruppe, $U \subseteq G$, A ein G -Modul.

Die **eindeutig** bestimmte Familie von Homomorphismen

$$\text{Res}_q: H^q(G, A) \longrightarrow H^q(U, A) \quad q \in \mathbb{Z}$$

mit

$$\text{i) } \text{Res}_0: H^0(G, A) \longrightarrow H^0(U, A)$$

$$\alpha + N_G A \longmapsto \alpha + N_U A$$

ii) Falls $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ exakte Sequenz von G -Modulen, so kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H^q(G, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(G, A) \\ \text{Res}_q \downarrow & & \downarrow \text{Res}_{q+1} \\ H^q(U, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(U, A) \end{array}$$

heißt **Restriktion**.

Zeige zuerst Eindeutigkeit, verwende dort geeignete Relationen im Existenzbeweis.

Beweis: Eindeutigkeit: Sei A ein G -Modul

Für $q \geq 0$ gilt:

$$0 \rightarrow A \rightarrow \mathcal{L}(G) \otimes A \rightarrow \mathcal{I}_G \otimes A \rightarrow 0 \text{ ist exakt.}$$

Da $\mathcal{L}(G) \otimes A$ c.t. ist der Verbindungshomomorphismus

$$\delta_T: H^q(T, \mathcal{L}(G) \otimes A) \rightarrow H^{q+1}(T, A) \text{ ein Iso für alle } T \subseteq G.$$

Man erhält mit ii) eine Kette von kommutativen Diagrammen

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(G, A^q) & \xrightarrow{\delta_0} & H^1(G, A^{q-1}) & \xrightarrow{\delta_2} & H^2(G, A^{q-2}) & \rightarrow \dots & \rightarrow H^q(G, A) \\ \text{Res}_0 \downarrow & & \downarrow \text{Res}_1 & & \downarrow & & \downarrow \text{Res}_q \\ H^0(U, A^q) & \xrightarrow{\delta_0} & H^1(U, A^{q-1}) & \xrightarrow{\delta_2} & H^2(U, A^{q-2}) & \rightarrow \dots & \rightarrow H^q(U, A) \end{array}$$

δ^q (curved arrow from $H^0(G, A^q)$ to $H^q(U, A)$)

Es gilt also $\text{Res}_q \circ \delta^q = \delta^q \circ \text{Res}_0$

Da δ^q ein Iso ist, folgt $\text{Res}_q = \delta^q \circ \text{Res}_0 \circ (\delta^q)^{-1}$

\uparrow
 $H^0(G, A^q) \rightarrow H^0(U, A^q)$

$$0 \longrightarrow I_G \otimes A \longrightarrow \Gamma(G) \otimes A \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Da $\Gamma(G) \otimes A$ c.t. sind die entsprechenden Verbindungshomomorphismen

$$f_q : H^q(T, I_G \otimes A) \longrightarrow H^{q+1}(T, A)$$

für alle $T \subseteq G$ Isomorphismen.

Wir erhalten aus ii) eine Kette von kommutativen Diagrammen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^{-|q|}(G, A^{-|q|}) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & H^{-2}(G, A^{-2}) & \rightarrow & H^{-1}(G, A^{-1}) & \rightarrow & H^0(G, A) \\
 \text{Res}_{-|q|} \downarrow & & & & \downarrow \text{Res}_{-2} & & \downarrow \text{Res}_{-1} & & \downarrow \text{Res}_0 \\
 H^{-|q|}(U, A^{-|q|}) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & H^{-2}(U, A^{-2}) & \rightarrow & H^{-1}(U, A^{-1}) & \rightarrow & H^0(U, A)
 \end{array}$$

$f^{|q|}$

$$f^{|q|} \text{Res}_{-|q|} = \text{Res}_0 \circ f^{|q|} \stackrel{\cong}{\Rightarrow} \text{Res}_{-|q|} = (f^{|q|})^{-1} \circ \text{Res}_0 \circ f^{|q|} \text{ für } q \leq 0.$$

Das ist **Eindeutigkeit**. Verwende nun die hier konstruierten Abbildungen, um **Existenz** zu zeigen:

Sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von G -Moduln.

Da I_G, J_G frei, also flach sind, sind

$$0 \rightarrow A \otimes I_G \rightarrow B \otimes I_G \rightarrow C \otimes I_G \rightarrow 0 \text{ und}$$

$$0 \rightarrow A \otimes \mathbb{Z}_6 \rightarrow B \otimes \mathbb{Z}_6 \rightarrow C \otimes \mathbb{Z}_6 \rightarrow 0 \quad \text{exakt.}$$

Induktiv folgt, dass $0 \rightarrow A^q \rightarrow B^q \rightarrow C^q \rightarrow 0$
 exakt ist für alle $q \in \mathbb{Z}$.

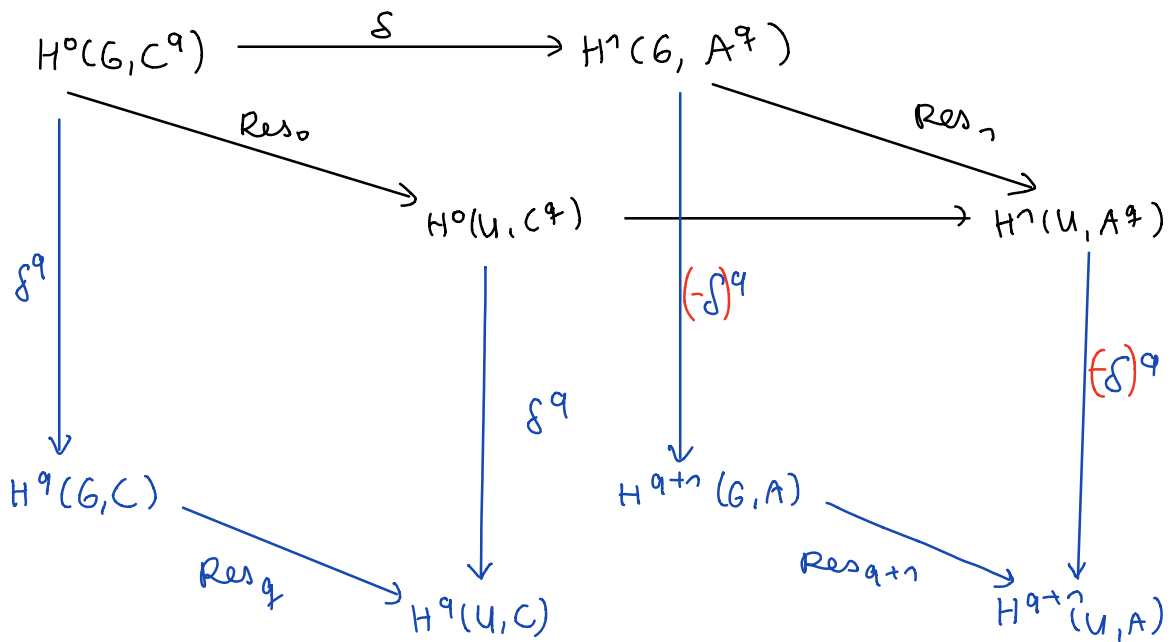
Wegen b) haben wir für $q \in \mathbb{Z}$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, C^q) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G, A^q) \\ & \searrow \text{Res}_0 & \searrow \text{Res}_1 \\ & & H^0(U, C^q) \xrightarrow{\delta} H^1(U, A^q) \end{array}$$

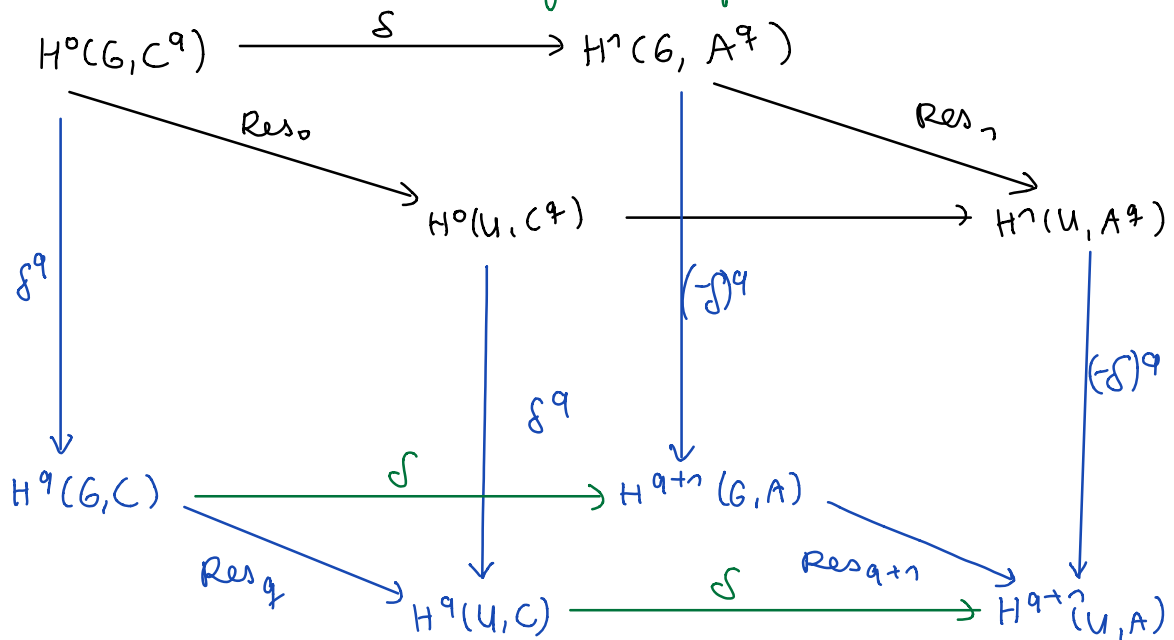
Wegen der oben gestellten Beziehung zwischen $\text{Res}_q, \text{Res}_0$
 kommutiert auch

$$\begin{array}{ccccc} H^0(G, C^q) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G, A^q) & & \\ \downarrow \text{Res}_0 & & \downarrow \text{Res}_1 & & \\ H^0(U, C^q) & \xrightarrow{\delta} & H^1(U, A^q) & & \\ \downarrow \delta^q & & \downarrow \delta^q & & \downarrow \delta^q \\ H^q(G, C) & & H^{q+1}(G, A) & & H^{q+1}(U, A) \\ \downarrow \text{Res}_q & & \downarrow \text{Res}_{q+1} & & \\ H^q(U, C) & & H^{q+1}(U, A) & & \end{array}$$

Ebenso, wenn wir δ durch $-\delta$ rechts ersetzen:



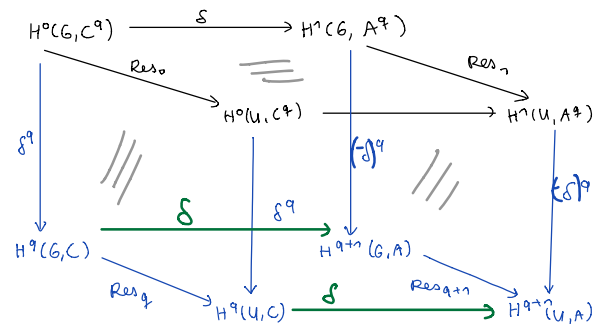
Wir haben weiter die Verbindungsmorphismen



ZIEL: Die Grundfläche kommutiert.

Dazu:

Wir wissen bereits:



Die "vertikalen" Abbildungen sind Isomorphismen.

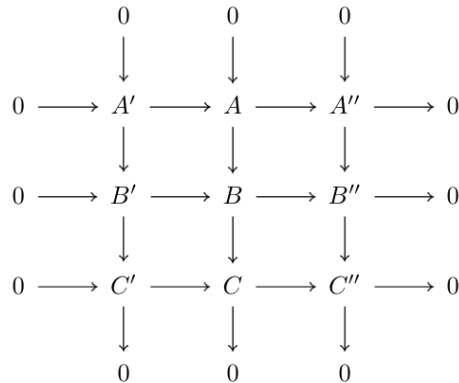
Zeige, dass "Vorder- und Rückseite" des Würfels kommutieren,

dann folgt Kommutativität der Grundfläche.

Kommutativität der Vorderseite

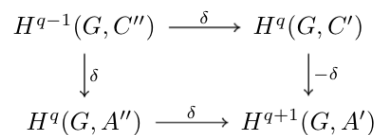
Erinnerung (VL 10):

(3.6) Satz. Gegeben sei das kommutative Diagramm



von G -Moduln und G -Homomorphismen mit exakten Zeilen und Spalten.

Dann ist das Diagramm



kommutativ.

Fallunterscheidung $q \leq 0$ oder $q \geq 0$

$q \leq 0$: Anwendung auf $G=U$ und das System



$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & I_G \otimes A^r & \longrightarrow & I_G \otimes B^r & \longrightarrow & I_G \otimes C^r \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G] \otimes A^r & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G] \otimes B^r & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G] \otimes C^r \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & A^r & \longrightarrow & B^r & \longrightarrow & C^r \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

liefert die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H^{q-1}(U, C^r) & \xrightarrow{\delta} & H^q(U, A^r) \\
\downarrow \delta & & \downarrow -\delta \\
H^q(U, C^{r-1}) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(U, A^{r-1})
\end{array} \quad q \in \mathbb{Z}, r \leq 0$$

Wir erhalten insbesondere:

$$\begin{array}{ccc}
H^0(U, C^q) & \xrightarrow{\delta} & H^1(U, A^q) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^q(U, C^{q-q}) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(U, A^{q-q})
\end{array}$$

δ^q (left side), $(-\delta)^q$ (right side)

kommutiert für $q \leq 0$.

$q \geq 0$:

Anwendung auf

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A^r & \longrightarrow & B^r & \longrightarrow & C^r \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G] \otimes A^r & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G] \otimes B^r & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G] \otimes C^r \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{J}_G \otimes A^r & \longrightarrow & \mathbb{J}_G \otimes B^r & \longrightarrow & \mathbb{J}_G \otimes C^r \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

für $r \geq 0$ liefert die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H^{q-1}(U, C^{r+1}) & \xrightarrow{\delta} & H^q(U, A^{r+1}) \\
 \delta \downarrow & & \downarrow -\delta \\
 H^q(U, C^r) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(U, A^r)
 \end{array} \quad q \in \mathbb{Z}, r \geq 0$$

Hintereinanderschalten ergibt insbesondere Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(U, C^q) & \xrightarrow{\delta} & H^1(U, A^q) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^q(U, C) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(U, A)
 \end{array}$$

//

δ^q (left bracket) and $(-\delta)^q$ (right bracket)

für $q \geq 0$.

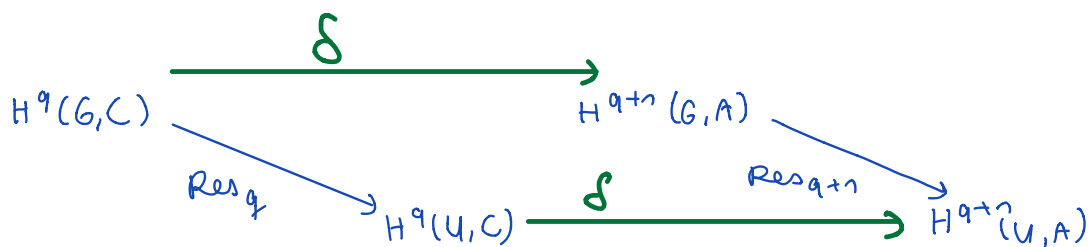
Insgesamt folgt Kommutativität der Vorderseite

Wenn wir $U = G$ setzen, folgt Kommutativität der Rückseite.

Daraus folgt jetzt die ~~Es folgt jetzt weiter~~ Kommutativität der Grundfläche:

Wir haben also gezeigt, dass für alle $g \in \mathbb{Z}$ gilt:

Das Diagramm



kommutiert.

(Wobei Res_q die im Existenzbeweis "konstruierten" Abb. sind.)

Das ist ii) aus der Definition.

Da i) trivialerweise erfüllt ist, folgt Existenz.