G endliche Gruppe, $U \leq G$ Untergruppe, A G-Modul.
Für $q \geq 1$ haben wir die Restriktionsabbildungen

$\mathrm{Res}_q : H^q(G,A) \longrightarrow H^q(U,A)$, die induziert werden
von $\quad (x : G^q \longrightarrow A) \longmapsto (x|_{U^q} : U^q \longrightarrow A)$

Ziel: universelle Eigenschaft dieser Restriktionsabbildungen herleiten und diese nutzen, um Familie

$$\left(\mathrm{Res}_q : H^q(G,A) \longrightarrow H^q(U,A)\right)_{q \in \mathbb{Z}}$$ zu definieren,

die diese Eigenschaft erfüllt

$\rightarrow$ Alternative Beschreibung der Restriktionsabbildungen.

a) Sei G eine endliche Gruppe, $U \leq G$ und A ein G-Modul.

Dann ist A ein U-Modul (vermöge der Einschränkung der Skalarmultiplikation auf U.)

z.z.: $\mathrm{Res}_0 : H^0(G,A) \longrightarrow H^0(U,A) \quad a + N_G A \longmapsto a + N_U A$

ist wohldefiniert.

Es gilt $A^G \subseteq A^U$. Daher ist $\pi : A^G \longrightarrow H^0(U,A)$, $a \longmapsto a + N_U A$ wohldefiniert.

Zeige, dass $N_G A \subseteq \ker(\pi) = N_U A$; dann induziert π Res_0.

Dazu: Sei $g_1, \dots, g_n$ ein Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen von U in G, also $G = \bigsqcup_{i=1}^{n} U g_i$.

Für $a \in A$ gilt dann:

$$\sum_{g \in G} g \cdot a = \sum_{i=1}^{n} \sum_{u \in U} u g_i \cdot a = \sum_{u \in U} \sum_{i=1}^{n} u g_i \cdot a$$
$$= \sum_{u \in U} u \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} g_i \cdot a}_{=: a' \in A} \in N_U A.$$

Also ist $N_G A \subseteq N_U A$.

b) Sei $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von G-Moduln (also auch von U-Moduln.)

z.z.:
$$\begin{tikzcd}
H^0(G,C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "Res_0"] & H^1(G,A) \arrow[d, "Res_1"] \\
H^0(U,C) \arrow[r, "\delta"] & H^1(U,A)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

"Erinnerung" an die Def. des Verbindungshomomorphismus:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial_0"] & B_{-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial_0"] & C_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial_1"] & B_0 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial_1"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\partial_1"] & 0 \\
& A_1 \arrow[r, "i"] & B_1 \arrow[r, "j"] & C_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$b_0 \longmapsto c_0 \in C^G$

$a_1 \longmapsto b_1$

Setze $res_1 : Hom_G(G, A) \longrightarrow Hom_U(U,A)$

$x \longmapsto x|_U$

$res_0 : A^G \hookrightarrow A^U$

$res_q : \{x : G^q \longrightarrow A\} \longrightarrow \{x : U^q \longrightarrow A\}$

$x \longmapsto x|_{U^q}$

Sei $c_0 \in C^G$ beliebig. Sei $a_1 + Im(\partial_1) = \delta(c_0 + N_G C)$.

Dann gibt es ein $b_0 \in B_0$ mit

$$j b_0 = c_0 \quad \text{und} \quad i a_1 = \partial b_0$$

Es gilt $res_1(i a_1) = i\, res_1(a_1) = res_1(\partial b_0) = \partial\, res_0(b_0)$

und $\quad j\,\mathrm{res}_0\, b_0 = \mathrm{res}_0(j b_0) = \mathrm{res}_0(c_0)$.

Daher ist
$$
\begin{aligned}
\mathrm{res}(a_1) + \mathrm{Im}(\partial_1) &= \delta(\mathrm{res}_0(c_0) + N_U C)\\
\| \qquad\qquad & \\
\mathrm{Res}_1(a_1 + \mathrm{Im}(\partial_1)) &= \delta(\mathrm{Res}_0(c_0 + N_G C))\\
\| \qquad\qquad & \\
\mathrm{Res}_1(\delta(c_0 + N_G C)) &
\end{aligned}
$$

Wir haben dabei verwendet, dass $\partial_{q+1} \circ \mathrm{res}_q = \mathrm{res}_{q+1} \circ \partial_{q+1}$ für alle $q \geq 0$ und dass

für alle G-Modulhomomorphismen $f: X \to Y$ gilt:

$$
\begin{tikzcd}
H^q(G,X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{res}_q"'] & H^q(G,Y) \arrow[d, "\mathrm{res}_q"] \\
H^q(U,X) \arrow[r, "f"] & H^q(U,Y)
\end{tikzcd}
$$
für $q = 0,1$. kommutiert. (*)

(Gilt analog für $q \geq 1$).

Bemerke:

c) Für $q \geq 1$ kommutiert

$$
\begin{tikzcd}
H^q(G,C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_q"] & H^{q+1}(G,A) \arrow[d, "\mathrm{Res}_q"] \\
H^q(U,C) \arrow[r, "\delta"] & H^{q+1}(U,A)
\end{tikzcd}
$$
(**)

Dazu:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{q-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial_q"] & B_{q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial_q"] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_q \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & B_q \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & C_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & 0 \\
& {} & {} & {} &
\end{tikzcd}
$$

Repräsentant von $\overline{c_q}$ in $\mathrm{Ker}(\partial_{q+1}) / \mathrm{Im}(\partial_q)$

$b_q \longmapsto c_q \in \mathrm{Ker}(\partial_{q+1})$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
A_{q+1} \arrow[r, "i"] & B_{q+1} \arrow[r, "j"] & C_{q+1} \arrow[r] & 0 \\
a_{q+1} \arrow[r, mapsto] & b_{q+1}
\end{tikzcd}$$

Sei $c_q \in \operatorname{Ker}(\partial_{q+1})$ beliebig,
Sei $a_{q+1} \in A_{q+1}$ mit $a_{q+1} + \operatorname{Im}(\partial_{q+1}) = \delta_q(\overline{c_q})$.
und $i\, a_{q+1} = \partial b_q$ für ein $b_q \in B_q$ mit $j b_q = c_q$.

$\operatorname{res}_{q+1}(a_{q+1})$ erfüllt dann:

Einschränkung von
$a_{q+1}: G^{q+1} \to A$
auf U^{q+1}

$$i(\operatorname{res}_{q+1}(a_{q+1})) = \operatorname{res}_{q+1}(i a_{q+1}) = \operatorname{res}_{q+1}(\partial b_q)$$
$$= \partial \operatorname{res}_q(b_q)$$

und es gilt $\operatorname{res}_q(c_q) = \operatorname{res}_q(j b_q) = j \operatorname{res}_q(b_q)$.
Daher ist

$$\operatorname{res}_{q+1}(a_{q+1}) + \operatorname{Im}(\partial_{q+1}) = \delta(\underbrace{\overline{\operatorname{res}_q(c_q)}}_{= \operatorname{Res}_q(\overline{c_q})}),$$

wobei $(*)$, $(**)$ verwendet wurden.

Definition / Satz:

Sei G eine endliche Gruppe, $U \leq G$, A ein G-Modul.
Die eindeutig bestimmte Familie von Homomorphismen

$$\operatorname{Res}_q : H^q(G, A) \longrightarrow H^q(U, A) \qquad q \in \mathbb{Z}$$

mit

i) $\operatorname{Res}_0 : H^0(G,A) \longrightarrow H^0(U,A)$

$$a + N_G A \longmapsto a + N_U A$$

ii) Falls $0 \to A \to B \to C \to 0$ exakte Sequenz von G-Moduln, so kommutiert

$$\begin{tikzcd} H^q(G,C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_q"'] & H^{q+1}(G,A) \arrow[d, "\mathrm{Res}_{q+1}"] \\ H^q(U,C) \arrow[r, "\delta"] & H^{q+1}(U,A) \end{tikzcd}$$

heißt Restriktion.

Zeige zuerst Eindeutigkeit, verwende dort gezeigte Relationen im Existenzbeweis.

Beweis: Eindeutigkeit: Sei A ein G-Modul

Für $q \geq 0$ gilt:

$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes A \longrightarrow J_G \otimes A \longrightarrow 0$ ist exakt.

Da $\mathbb{Z}[G] \otimes A$ c.t., ist der Verbindungshomomorphismus

$\delta_q : H^q(T, J_G \otimes A) \longrightarrow H^{q+1}(T, A)$ ein Iso für alle $T \leq G$.

Man erhält mit ii) eine Kette von kommutativen Diagrammen

$$\begin{tikzcd} H^0(G, A^q) \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_0"'] \arrow[rrrr, bend left, "\delta^q"] \arrow[dr, phantom, "/\!/\!/"] & H^1(G, A^{q-1}) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_1"] \arrow[dr, phantom, "/\!/\!/"] & H^2(G, A^{q-2}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "/\!/\!/"] & \dots \arrow[r] & H^q(G,A) \arrow[d, "\mathrm{Res}_q"] \\ H^0(U, A^q) \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[rrrr, bend right, "\delta^q"'] & H^1(U, A^{q-1}) \arrow[r, "\delta_2"] & H^2(U, A^{q-2}) \arrow[r] & \dots \arrow[r] & H^q(U,A) \end{tikzcd}$$

Es gilt also $\mathrm{Res}_q \circ \delta^q = \delta^q \circ \mathrm{Res}_0$

Da δ^q ein Iso ist, folgt $\mathrm{Res}_q = \delta^q \circ \underset{\substack{\uparrow \\ H^0(G, A^q) \to H^0(U, A^q)}}{\mathrm{Res}_0} \circ (\delta^q)^{-1}$

$$0 \longrightarrow I_G \otimes A \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes A \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Da $\mathbb{Z}[G] \otimes A$ c.t. sind die entsprechenden Verbindungs-homomorphismen

$$\delta_q : H^q(T, I_G \otimes A) \longrightarrow H^{q+1}(T, A)$$

für alle $T \leq G$ Isomorphismen.

Wir erhalten aus ii) eine Kette von kommutativen Diagrammen:

$$\begin{tikzcd}
H^{-|q|}(G, A^{-|q|}) \arrow[r] \arrow[d, "Res_{-|q|}"] \arrow[rrrr, bend left, "\delta^{|q|}"] & \dots \arrow[r] & H^{-2}(G, A^{-2}) \arrow[r] \arrow[d, "Res_{-2}"] \arrow[dl, phantom, "///"] & H^{-1}(G, A^{-1}) \arrow[r] \arrow[d, "Res_{-1}"] \arrow[dl, phantom, "///"] & H^{0}(G, A) \arrow[d, "Res_0"] \arrow[dl, phantom, "///"] \\
H^{-|q|}(U, A^{-|q|}) \arrow[r] \arrow[rrrr, bend right, "\delta^{|q|}"'] & \dots \arrow[r] & H^{-2}(U, A^{-2}) \arrow[r] & H^{-1}(U, A^{-1}) \arrow[r] & H^{0}(U, A)
\end{tikzcd}$$

$$\delta^{|q|} Res_{-|q|} = Res_0 \circ \delta^{|q|} \underset{\delta^{|q|}\ Iso}{\Longrightarrow} Res_{-|q|} = (\delta^{|q|})^{-1} \circ Res_0 \circ \delta^{|q|}$$

für $q \leq 0$.

Das ist Eindeutigkeit. Verwende nun die hier konstruierten Abbildungen, um Existenz zu zeigen:

Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine exakte Sequenz von G-Moduln.

Da I_G, J_G frei, also flach sind, sind

$$0 \longrightarrow A \otimes I_G \longrightarrow B \otimes I_G \longrightarrow C \otimes I_G \longrightarrow 0 \quad \text{und}$$

$$0 \longrightarrow A \otimes J_G \longrightarrow B \otimes J_G \longrightarrow C \otimes J_G \longrightarrow 0 \qquad \text{exakt.}$$

Induktiv folgt, dass $\quad 0 \longrightarrow A^q \longrightarrow B^q \longrightarrow C^q \longrightarrow 0$
exakt ist für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Wegen b) haben wir für $q \in \mathbb{Z}$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^0(G, C^q) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\mathrm{Res}_0"'] & & H^1(G, A^q) \arrow[dr, "\mathrm{Res}_1"] & \\
& H^0(U, C^q) \arrow[rr, "\delta"] & & H^1(U, A^q)
\end{tikzcd}$$

Wegen der oben gezeigten Beziehung zwischen Res_q, Res_0
kommutiert auch

$$\begin{tikzcd}
H^0(G, C^q) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\mathrm{Res}_0"] \arrow[dd, "\delta^q"'] & & H^1(G, A^q) \arrow[dr, "\mathrm{Res}_1"] \arrow[dd, "\delta^q"] & \\
& H^0(U, C^q) \arrow[rr] \arrow[dd, "\delta^q"] & & H^1(U, A^q) \arrow[dd, "\delta^q"] \\
H^q(G, C) \arrow[dr, "\mathrm{Res}_q"'] & & H^{q+1}(G, A) \arrow[dr, "\mathrm{Res}_{q+1}"'] & \\
& H^q(U, C) & & H^{q+1}(U, A)
\end{tikzcd}$$

Ebenso, wenn wir δ durch $-\delta$ rechts ersetzen:

$$\begin{tikzcd}
H^0(G,C^q) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "Res_0"] \arrow[dd, "\delta^q"'] & & H^1(G,A^q) \arrow[dr, "Res_1"] \arrow[dd, "(-\delta)^q" near start] & \\
& H^0(U,C^q) \arrow[rr] \arrow[dd, "\delta^q" near start] & & H^1(U,A^q) \arrow[dd, "(-\delta)^q"] \\
H^q(G,C) \arrow[dr, "Res_q"'] & & H^{q+1}(G,A) \arrow[dr, "Res_{q+1}"'] & \\
& H^q(U,C) & & H^{q+1}(U,A)
\end{tikzcd}$$

Wir haben weiter die Verbindungshomomorphismen

$$\begin{tikzcd}
H^0(G,C^q) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "Res_0"] \arrow[dd, "\delta^q"'] & & H^1(G,A^q) \arrow[dr, "Res_1"] \arrow[dd, "(-\delta)^q" near start] & \\
& H^0(U,C^q) \arrow[rr] \arrow[dd, "\delta^q" near start] & & H^1(U,A^q) \arrow[dd, "(-\delta)^q"] \\
H^q(G,C) \arrow[dr, "Res_q"'] \arrow[rr, "\delta" near start] & & H^{q+1}(G,A) \arrow[dr, "Res_{q+1}"'] & \\
& H^q(U,C) \arrow[rr, "\delta"] & & H^{q+1}(U,A)
\end{tikzcd}$$

ZIEL: Die Grundfläche kommutiert.

Dazu:

Wir wissen bereits:

$$\begin{tikzcd}
H^0(G,C^q) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "Res_0"] \arrow[dd, "\delta^q"'] & & H^1(G,A^q) \arrow[dr, "Res_1"] \arrow[dd, "(-\delta)^q"] & \\
& H^0(U,C^q) \arrow[rr] \arrow[dd, "\delta^q"] & & H^1(U,A^q) \arrow[dd, "(\delta)^q"] \\
H^q(G,C) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "Res_q"'] & & H^{q+1}(G,A) \arrow[dr, "Res_{q+1}"] & \\
& H^q(U,C) \arrow[rr, "\delta"] & & H^{q+1}(U,A)
\end{tikzcd}$$

Die "vertikalen" Abbildungen sind Isomorphismen.

Zeige, dass "Vorder- und Rückseite" des Würfels kommutieren, dann folgt Kommutativität der Grundfläche.

Kommutativität der Vorderseite

Erinnerung (VL 10):

(3.6) Satz. *Gegeben sei das kommutative Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

von G-Moduln und G-Homomorphismen mit exakten Zeilen und Spalten. Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^{q-1}(G,C'') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] & H^q(G,C') \arrow[d, "-\delta"] \\
H^q(G,A'') \arrow[r, "\delta"] & H^{q+1}(G,A')
\end{tikzcd}$$

kommutativ.

Fallunterscheidung $q \leq 0$ oder $q \geq 0$

$q \leq 0$: Anwendung auf $G = U$ und das System

0 0 0

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & I_G \otimes A^r \arrow[r] \arrow[d] & I_G \otimes B^r \arrow[r] \arrow[d] & I_G \otimes C^r \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}[G] \otimes A^r \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[G] \otimes B^r \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[G] \otimes C^r \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^r \arrow[r] \arrow[d] & B^r \arrow[r] \arrow[d] & C^r \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

liefert die kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^{q-1}(U, C^r) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] & H^q(U, A^r) \arrow[d, "-\delta"] \\
H^q(U, C^{r-1}) \arrow[r, "\delta"] & H^{q+1}(U, A^{r-1})
\end{tikzcd} \qquad q \in \mathbb{Z}, r \leq 0$$

Wir erhalten insbesondere:

$$\begin{tikzcd}
H^0(U, C^q) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] \arrow[ddd, bend right=60, "\delta^q"'] & H^1(U, A^q) \arrow[d] \arrow[ddd, bend left=60, "(-\delta)^q"] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
H^q(U, C^{q-q}) \arrow[r, "\delta"] & H^{q+1}(U, A^{q-q})
\end{tikzcd}$$

kommutiert für $q \leq 0$.

$q \geq 0$:

Anwendung auf

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A^r \arrow[r] \arrow[d] & B^r \arrow[r] \arrow[d] & C^r \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}[6] \otimes A^r \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[6] \otimes B^r \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[6] \otimes C^r \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & J_6 \otimes A^r \arrow[r] \arrow[d] & J_6 \otimes B^r \arrow[r] \arrow[d] & J_6 \otimes C^r \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

für $r \geq 0$ liefert die kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^{q-1}(U, C^{r+1}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & H^q(U, A^{r+1}) \arrow[d, "-\delta"] \\
H^q(U, C^r) \arrow[r, "\delta"] & H^{q+1}(U, A^r)
\end{tikzcd} \qquad q \in \mathbb{Z},\ r \geq 0$$

Hintereinanderschalten ergibt insbesondere Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
H^0(U, C^q) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "\delta^q"'] & H^1(U, A^q) \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60, "(-\delta)^q"] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
H^q(U, C) \arrow[r, "\delta"] & H^{q+1}(U, A)
\end{tikzcd}$$

für $q \leq 0$.

Insgesamt folgt Kommutativität der Vorderseite

Wenn wir $U = G$ setzen, folgt Kommutativität der Rückseite.

Daraus folgt jetzt die ~~Es folgt jetzt weiter~~ Kommutativität der Grundfläche:

Wir haben also gezeigt, dass für alle $q \in \mathbb{Z}$ gilt:

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^q(G,C) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\mathrm{Res}_q"'] & & H^{q+1}(G,A) \arrow[dr, "\mathrm{Res}_{q+1}"'] & \\
& H^q(U,C) \arrow[rr, "\delta"] & & H^{q+1}(U,A)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

(wobei Res_q die im Existenzbeweis "konstruierten" Abb. sind)

Das ist ii) aus der Definition.

Da i) trivialerweise erfüllt ist, folgt Existenz.