Sei $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von G-Moduln.

a) Beh.: Die induzierte Sequenz $0 \longrightarrow A^G \xrightarrow{i} B^G \longrightarrow C^G$ ist exakt.

- Zur Wohldefiniertheit der induzierten Sequenz:
  Seien X, Y G-Moduln, $f: X \longrightarrow Y$ ein G-Modulhomomorphismus.
  Dann gilt $f(X^G) \subseteq Y^G$, denn:
  Für $x \in X^G$ und $g \in G$ gilt: $g.\, f(x) = f(g.x) = f(x)$

- Exaktheit bei A^G: $i|_{A^G}$ ist injektiv, da i injektiv nach Annahme
- Exaktheit bei B^G:

  Es gilt: $\mathrm{Ker}(j|_{B^G}) = \mathrm{Ker}(j) \cap B^G \underset{\substack{\text{Exaktheit der} \\ \text{ursprünglichen} \\ \text{Sequenz}}}{=} \mathrm{Im}(i) \cap B^G$

  Wir zeigen, dass $\mathrm{Im}(i) \cap B^G = \mathrm{Im}(i|_{A^G})$

  Dazu: "$\subseteq$" Sei $b = i(a) \in \mathrm{Im}(i) \cap B^G$ beliebig.
  Für alle $g \in G$ gilt dann:
  $b = g.b = g.\, i(a) = i(g.a) = i(a) \underset{i \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} g.a = a.$
  Also ist $a \in A^G$ und somit $b \in \mathrm{Im}(i|_{A^G})$.

  "$\supseteq$" · Wegen Wohldefiniertheit des induzierten Sequenz ist $\mathrm{Im}(i|_{A^G}) \subseteq B^G$.

  · Es gilt $\mathrm{Im}(i|_{A^G}) \subseteq \mathrm{Im}(i) \underset{\substack{\text{Exaktheit der} \\ \text{Ausgangssequenz}}}{=} \mathrm{Ker}(j)$

  Insgesamt folgt $\mathrm{Im}(i|_{A^G}) \subseteq B^G \cap \mathrm{Ker}(j)$.

b) Beh.:

$$0 \longrightarrow A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G \xrightarrow{\delta_G} H^1(G,A) \xrightarrow{i_1} H^1(G,A) \rightarrow \dots$$
$$c \longmapsto \delta_0(c + N_G C)$$

ist exakt.

Bew. d. Beh.:

· $0 \longrightarrow A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G$ ist exakt nach a)

· $H^1(G,A) \longrightarrow H^1(G,B) \longrightarrow H^1(G,C) \xrightarrow{\delta_1} H^2(G,A) \longrightarrow \dots$

ist exakt wegen Exaktheit der langen Kohomologiesequenz

Es bleibt, Exaktheit bei C^G und $H^1(G,A)$ zu prüfen.

• Exaktheit bei C^G:

$$\begin{tikzcd}
B^G \arrow[r, "j"] & C^G \arrow[d, two heads, "pr"] \arrow[rr, "\delta_G"] & & H^1(G,A) \\
& \underbrace{C^G/N_G C}_{= H^0(G,C)} \arrow[rr, "\delta_0"] & & H^1(G,A)
\end{tikzcd}$$

kommutiert nach Def. von δ_G.

Weil $j(N_G B) \subseteq N_G C$ faktorisiert $pr \circ j$, wir erhalten:

$$\begin{tikzcd}
& B^G \arrow[r, "j|_{B^G}"] \arrow[d, two heads, "pr_B"] & C^G \arrow[d, two heads, "pr_C"] \arrow[rd, "\delta_G"] & \\
H^0(G,B) \arrow[r, phantom, "="] & B^G/N_G B \arrow[r, "j_0"] & C^G/N_G C \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, phantom, "= H^0(G,C)"] & H^1(G,A) \\
& b + N_G B \arrow[r, mapsto] & j(b) + N_G C &
\end{tikzcd}$$

Wegen Exaktheit der langen Kohomologiesequenz ist $\delta_0 \circ j_0 = 0$

Da $\delta_G \circ j|_{B^G} = \underbrace{\delta_0 \circ j_0}_{=0} \circ pr_B$ folgt $\delta_G \circ j|_{B^G} = 0$,

also $\mathrm{Ker}(\delta_G) \supseteq \mathrm{Im}(j|_{B^G})$.

Zeige jetzt, dass $\mathrm{Ker}(\delta_G) \subseteq \mathrm{Im}(j|_{B^G})$

Sei $x \in \mathrm{Ker}(\delta_G)$ beliebig. Dann ist $pr_C(x) = x + N_G C \in \mathrm{Ker}(\delta_0)$.

Wegen Exaktheit der langen Kohomologiesequenz/der unteren Zeile im obigen Diagramm findet man $b \in B^G$ mit

$x + N_G C = j_0(b + N_G B) = j(b) + N_G C$

Wähle $c \in C$ so, dass $x = j(b) + N_G c$

Da $j: B \longrightarrow C$ surjektiv ist, findet man ein $b' \in B$ mit $j(b') = c$.

Da $N_G c = N_G j(b') = j(N_G b')$ und $N_G b' \in N_G B \subseteq B^G$

folgt: $x = j(\underbrace{b + N_G b'}_{\in B^G,\ \text{da } b, N_G b' \in B^G}) \in Im(j|B^G)$.

Insgesamt folgt $Ker(\delta_G) = Im(j|B^G)$, also Exaktheit bei C^G.

- Exaktheit bei $H^1(G,A)$:

Wegen Exaktheit der langen Kohomologiesequenz gilt

$$Ker(i_1) = Bild(\delta_0) \underset{\substack{\delta_G = \delta_0 \circ pr_C \\ pr_C \text{ ist surjektiv}}}{=} Bild(\delta_G)$$

c) Falls A $\mathbb{Z}[G]$-projektiv, so gilt $H^q(G,A) = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$

Mit b) folgt:

$$0 \longrightarrow A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G \longrightarrow \underset{H^1(G,A)}{\overset{0}{\shortparallel}}$$

ist exakt.