# Übung 4

28.5.2020

## Aufgabe 1

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & k(\mathfrak{q}) \\
K \arrow[ur] \arrow[d, "p"] \arrow[dd, bend right=60, swap, "\text{ab.}"] & \\
H \arrow[d] & \\
k & \text{i.q.}
\end{tikzcd}$$

$p$ Pz.

**Gesucht:** Unendlich viele zyklische $K|H$ mit

- $[K:H] = p$
- $K|k$ ab.
- $\mathfrak{f}_{K|k} = \mathfrak{q}$ zerlegtes Primideal in $k$

$q\mathcal{O}_k = \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}$

$$[k(\mathfrak{q}) : H] = \frac{w(\mathfrak{q})}{w(1)}(q-1)$$

$$= \frac{1}{w(1)}(q-1) \quad \text{für fast alle } \mathfrak{q},$$

da $w(\mathfrak{m}) = \#\{\varepsilon \in \mathcal{O}_k^\times \mid \varepsilon \equiv 1 \,(\mathfrak{m})\}$

**Genauer:**

$$\mathrm{Gal}(k(\mathfrak{q})/H) \simeq (\mathcal{O}_k/\mathfrak{q})^\times / U \quad \text{ist zyklisch}$$

$$U = \{\bar{\varepsilon} \mid \varepsilon \in \mathcal{O}_k^\times\}$$

**1. Bedingung:** $q \equiv 1 \pmod{p\,w(1)}$

Wann ist $q$ zerlegt?

Sei $d = -p_1 \cdots p_s$ ; $\quad k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$

dann gilt: $q$ zerlegt $\Leftrightarrow \left(\frac{d}{q}\right) = +1$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{p_1}{q}\right) \cdots \left(\frac{p_s}{q}\right) = 1$$

Falls $q \equiv 1 \pmod 4$, so ist dies äquivalent zu

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{q}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{q}{p_s}\right) = 1$$

Wähle also

$$q \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{kgV}(pw(1), d, 4))$$

Nach dem Satz von der arithmetischen Progression gibt es $\infty$ viele solcher $q$. $\blacksquare$

<u>Bemerkung</u>: Sei $p$ Pz. Dann gibt es unendlich viele zyklische Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ vom Grad $p$.

<u>Lsg</u>:

$$\left.\begin{array}{c} \mathbb{Q}(\zeta_q) \\ | \\ K \\ |\,\big)\, p \\ \mathbb{Q} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} q \equiv 1 \pmod p \\ (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \text{ zyklisch} \end{array}$$

## Aufgabe 4

$G = \langle \sigma \rangle$, $\operatorname{ord}(\sigma) = 2$

$A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit trivialer $G$-Wirkung

$B = \mathbb{Z}$ mit $\sigma \cdot z := -z, \ \forall z \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow B^G = 0 \Longrightarrow A^G \otimes B^G = 0$$

$$\bar{1} \otimes 1 \in A \otimes B$$

$$\sigma(\bar{1} \otimes 1) = \bar{1} \otimes (-1) = \bar{1} \cdot \overline{(-1)} \otimes 1$$
$$= \bar{1} \otimes 1$$

$$\Rightarrow \bar{1} \otimes 1 \in (A \otimes B)^G$$

Die Aussage ist also i. A. falsch. Das Gegenbeispiel ist jedoch unbefriedigend, da es sehr speziell ist.