

# Übung 4

---

28.5.2020

---

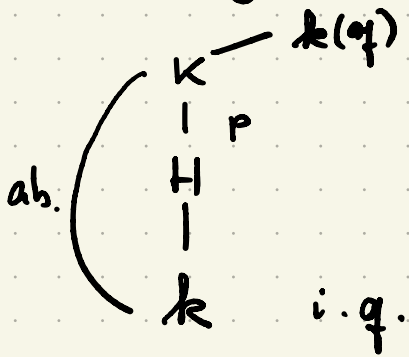
---

---

---



# Aufgabe 1



$p \neq 2$ .

Gesucht: Unendlich viele zyklische  $K|H$  mit

- $[K:H] = p$
- $K|k$  ab.
- $f_{K|k} = \alpha_f$  zerlegtes  
Prinomial in  $k$

$$[k(\alpha_f):H] = \frac{w(\alpha_f)}{w(1)} (q-1)$$

$$q \text{ O}_k = \alpha_f \bar{\alpha}_f$$

$$= \frac{1}{w(m)} (q-1) \quad \text{für fast alle } \alpha_f,$$

$$\text{da } w(m) = \#\{\varepsilon \in \text{O}_k^\times \mid \varepsilon \equiv 1 \pmod{m}\}$$

Genaues:

$$\text{Gal}(k(\alpha_f)/H) \simeq (\text{O}_k/\alpha_f)^\times / \mathcal{U} \quad \text{ist zyklisch}$$

$$\mathcal{U} = \{\bar{\varepsilon} \mid \varepsilon \in \text{O}_k^\times\}$$

1. Bedingung:

$$q \equiv 1 \pmod{pw(1)}$$

Wann ist  $q$  zerlegt?

Sei  $d = -p_1 \dots p_s$ ;

$$k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$$

dann gilt:  $q$  zerlegt  $\Leftrightarrow \left(\frac{d}{q}\right) = +1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-1}{q}\right) \left(\frac{p_1}{q}\right) \cdots \left(\frac{p_s}{q}\right) = 1$$

Falls  $q \equiv 1 \pmod{4}$ , so ist dies äquivalent zu

$$\Leftrightarrow \left(\frac{q}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{q}{p_s}\right) = 1$$

Wähle also

$$q \equiv 1 \pmod{\text{kgV}(p_1, \dots, p_s, 4)}$$

Nach dem Satz von der arithmetischen Progression gibt es  $\infty$  viele solcher  $q$ .

Bemerkung: Sei  $p \in \mathbb{P}$ . Dann gibt es unendlich viele zyklische Erweiterungen von  $\mathbb{Q}$  vom Grad  $p$ . ▣

Lsg:

$$\mathbb{Q}(\zeta_q)$$

$$\downarrow$$

$$K$$

$$\downarrow$$

$$(\ )_p$$

$$\mathbb{Q}$$

$$q \equiv 1 \pmod{p}$$

$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$  zyklisch

Aufgabe 4  $G = \langle \sigma \rangle$ ,  $\text{ord}(\sigma) = 2$

$A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  mit trivialer  $G$ -Wirkung

$B = \mathbb{Z}$  mit  $\sigma \cdot z := -z$ ,  $\forall z \in \mathbb{Z}$ .

$$\Rightarrow B^G = 0 \Rightarrow A^G \otimes B^G = 0$$

$$\bar{1} \otimes 1 \in A \otimes B$$

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{1} \otimes 1) &= \bar{1} \otimes (-1) = \bar{1} \cdot \overline{(-1)} \otimes 1 \\ &= \bar{1} \otimes 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{1} \otimes 1 \in (A \otimes B)^G$$

Die Aussage ist also i. A. falsch. Das Gegenbeispiel ist jedoch unzufriedenend, da es sehr speziell ist.