# Übung proj. Moduln

Mittwoch, 27. Mai 2020 16:17

__Zz__ $X$ $G$-Modul FASÄ

i) $X$ projektiv

ii) $\mathrm{Hom}_G(X, -)$ exakt

iii) $\exists Y$ $G$-Modul sodass $X \oplus Y$ frei

iv) $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \twoheadrightarrow X \longrightarrow 0$ zerfällt.

__Bew__: Wir zeigen die Aussage nicht nur für $G$-Moduln, sondern für Moduln über einem bel. Ring $R$

Wir zeigen $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3)$

__$(1) \Rightarrow (2)$:__

Wissen bereits $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ links-exakt.

Sei $M \xrightarrow{h} N$ surjektiv. Sei $f: X \longrightarrow N$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\exists g"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads] & N \end{tikzcd}$$

Dann $\exists g: X \longrightarrow M$, sodass $\underbrace{h \circ g}_{= h_* g} = f$, da $X$ projektiv

$\Rightarrow h_*: \mathrm{Hom}_R(X, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X, N)$ surjektiv

$\Rightarrow \mathrm{Hom}_R(X,-)$ exakt.

__$(2) \Rightarrow (4)$:__ Sei $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$

exakt. $\Rightarrow 0 \rightarrow \mathrm{Hom}(X, A) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}(X, B) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Hom}(X,X) \rightarrow 0$

exakt $\Rightarrow \exists\, \sigma \in \mathrm{Hom}(X, B)$, sodass $\pi \circ \sigma = \pi_*(\sigma) = id_X$

$\llcorner$ $\pi_*$ surj.

## (4) ⇒ (3)

Betrachte eine Präsentation

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

mit $K = \ker \pi$, $F$ frei

$\Rightarrow \exists\ \sigma : X \longrightarrow F$, $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_X$

Betrachte $\varphi : K \oplus X \longrightarrow F$

$$(k, x) \longmapsto \iota(k) + \sigma(x) = k + \sigma(x)$$

und $\psi : F \longrightarrow K \oplus X$

$$x \longmapsto (x - \sigma\pi(x), \pi(x))$$

$\psi$ wohldef.: $\pi(x - \sigma\pi(x)) = \pi(x) - \underbrace{\pi\sigma}_{=\mathrm{id}}\pi(x) = \pi(x) - \pi(x) = 0$

$\Rightarrow x - \sigma\pi(x) \in K = \ker \pi$

Es gilt $\varphi \circ \psi(x) = \varphi(x - \sigma\pi(x), \pi(x))$

$$= x - \sigma\pi(x) + \pi(x) = x$$

und $\psi \circ \varphi(k, x) = \psi(k + \sigma(x)) =$

$$= (k + \sigma(x) - \sigma\pi(k + \sigma(x)), \pi(k + \sigma(x)))$$

$$= (k + \sigma(x) - \sigma\underbrace{\pi k}_{=0} - \sigma\underbrace{\pi\sigma}_{=\mathrm{id}}x, \underbrace{\pi k}_{=0} + \underbrace{\pi\sigma}_{=\mathrm{id}}x)$$

$$= (k + \sigma(x) - \sigma(x), x)$$

$$= (k, x)$$

$\Rightarrow \varphi = \psi^{-1}$, $F \simeq K \oplus X$

**(3) ⇒ (1):** Wir zeigen zunächst: Freie $R$-Moduln sind projektiv. Sei $F$ frei mit Basis $\{e_i\}_{i \in I}$.

Sei $M \xrightarrow{f} N$ surjektiv, $g : F \longrightarrow N$ bel.

Wähle $\forall i \in I$ ein $m_i \in M$ mit $f(m_i) = g(e_i)$

(möglich, da $f$ surjektiv)

Definiere $h$ durch lineare Fortsetzung von

$e_i \longmapsto m_i$ (möglich, da $F$ frei)

Dann gilt $(f \circ h)(e_i) = f(m_i) = g(e_i)$

$\Rightarrow f \circ h = g$

$\Rightarrow F$ projektiv.

Sei nun $Y$ Modul mit $X \oplus Y$ frei,

und $M \xrightarrow{f} N$ surjektiv, $g : X \longrightarrow N$ bel.

$$\begin{tikzcd}
X \oplus Y \arrow[d, dashed, "\exists \tilde{h}"'] \arrow[r, bend right, "p_X"'] & X \arrow[l, "i_X"'] \arrow[d, "g"] \\
M \arrow[r, two heads, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

$X \oplus Y$ frei, also projektiv

$\Rightarrow \exists\, \tilde{h} : X \oplus Y \longrightarrow M$ mit

$$f \circ \tilde{h} = g \circ p_X$$

Sei $h := \tilde{h} \circ i_X : X \longrightarrow M$

Dann gilt $f \circ h = f \circ \tilde{h} \circ i_X = g \circ p_X \circ i_X = g \circ id_X = g$

$\Rightarrow X$ projektiv $\square$